怀铁一中周考试卷

一、单选题

1．过点 $P(2,-1)$ 且与原点距离最大的直线方程是（　　）

A．$2x-y-5=0$　　B．$x-2y-4=0$　　C．$2x+y-3=0$　　D．$x+2y=0$

2．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_2 a_n-1=\log_2 a_{n+1}(n\in N)$，若 $a_1+a_3+a_5+\ldots\ldots+a_{2n+1}=2^n$.则 $\log_2(a_2+a_4+a_6+\ldots\ldots+a_{2n})$ 的值是（　　）

A．$2n+1$　　B．$2n-1$　　C．$n+1$　　D．$n-1$

3．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则点 D_1 到平面 A_1BC_1 的距离为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

4．经过点 $P(0,-1)$ 作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1,-2)$，$B(2,1)$ 的线段总有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围为（　　）

A．$[-1,1]$　　B．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C．$[-1,1)$　　D．$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

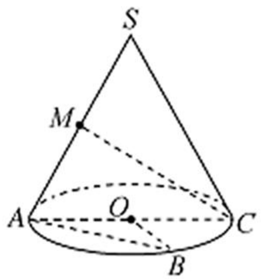
5．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在一点 P 满足 $F_1P\perp F_2P$，F_1,F_2 分别为椭圆的左右焦点，则椭圆的离心率的范围是（　　）

A．$(0,\frac{1}{2}]$　　B．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　C．$[\frac{1}{2},1)$　　D．$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

6．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n$，且 $a_2=\frac{1}{3}$，则 $a_n=($　　$)$

A．$\frac{n-1}{n+1}$　　B．$\frac{1}{2n-1}$　　C．$\frac{n-1}{2n-1}$　　D．$\frac{1}{n+1}$

7. 如图，圆锥 SO 的轴截面 SAC 是等边三角形，点 B 是底面圆周上的一点，且 $\angle BOC=60°$，点 M 是 SA 的中点，则异面直线 AB 与 CM 所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知实数 x，y 满足 $x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，则 $\left|\sqrt{3}x+y-6\right|$ 的取值范围是（　　）

A．$\left[6-\sqrt{6},3\right)$　　B．$\left[3-\frac{\sqrt{6}}{2},3\right)$　　C．$\left[6-\sqrt{6},6\right)$　　D．$\left[3-\frac{\sqrt{6}}{2},6\right)$

二、多选题

9．在数列$\{a_n\}$中，$a_n=(n+1)(\frac{7}{8})^n$，则数列$\{a_n\}$中的最大项可以是（　　）

A．第 6 项　　B．第 7 项

C．第 8 项　　D．第 9 项

10．直线l经过点$P\left(5,5\right)$，且与圆$C:x^2+y^2=25$相交，截得弦长为$4\sqrt{5}$，则直线l的方程为（　　）

A．$x-2y-5=0$　　B．$x-2y+5=0$

C．$2x-y+5=0$　　D．$2x-y-5=0$

11．正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，$AB=AA_1=1$，P点满足$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$0\le\mu\le1$）（　　）

A．当$\lambda=1$时，$\triangle PBB_1$的面积是定值　　B．当$\lambda=1$时，$\triangle PAB_1$的周长是定值

C．当$\mu=1$时，$\triangle PBC$的面积是定值　　D．当$\mu=1$时，三棱锥$P-A_1BC$的体积为定值

12．以下说法正确的是（　　）

A．以$A\left(1,2\right)$，$B\left(3,4\right)$为直径的圆方程是$\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\left(y-3\right)\left(y-4\right)=0$

B．已知$A\left(1,2\right)$，$B\left(3,4\right)$，则AB的垂直平分线方程为$x+y-5=0$

C．抛物线$y^2=2x$上任意一点到$M\left(\frac{5}{3},0\right)$的最小值为$\frac{\sqrt{21}}{3}$

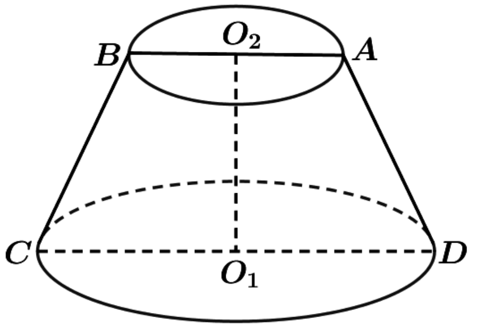
D．双曲线C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$上满足到左焦点$F_1\left(-3,0\right)$的距离为 5 的点共有四个

三、填空题

13．设数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$S_{2019}=$______.

14．已知直线 l_1:$x-y-5=0$ 和直线 l_2:$y=-4$，抛物线 $x^2=16y$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是______

15．如图所示的圆台O_1O_2，在轴截面$ABCD$中，$CD=2AB$，且$AB=AD=BC=2\text{cm}$，则该圆台的体积为_________cm^3；侧面积为_________cm^2.



16．设F_1，F_2是双曲线$x^2-y^2=4$的两个焦点，P是双曲线上任意一点，过F_1作$\angle F_1PF_2$平分线的垂线，垂足为M，则点M到直线$x+y-2\sqrt{2}=0$的距离的最大值是__________.

四、解答题

17．数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=(\lambda-3)a_n+2^n(n\in\mathrm{N}^*)$.

（1）当$a_2=-1$时，求λ及a_3的值；

（2）是否存在λ，使数列$\{a_n\}$为等差数列？若存在，求其通项公式；若不存在，说明理由.

18．在平面直角坐标系xoy中，已知$\triangle ABC$的顶点$B(-3,0)$，$C(3,0)$，且$|AB|=2|AC|$，

（1）设$\triangle ABC$的外接圆为$\odot M$，请写出$\odot M$周长最小时的$\odot M$标准方程.

（2）设顶点$A(x,y)$，求顶点A的轨迹方程及$\triangle ABC$面积的最大值.

19．在直角坐标系xOy中，抛物线$C:x^2=2y$与直线$l:y=kx+2(k\neq0)$交于M,N两点，又$P(0,b)$在y轴上，直线PM,PN的斜率分别为k_1,k_2.

（1）设M,N到y轴的距离分别为d_1,d_2，证明：d_1与d_2的乘积为定值；

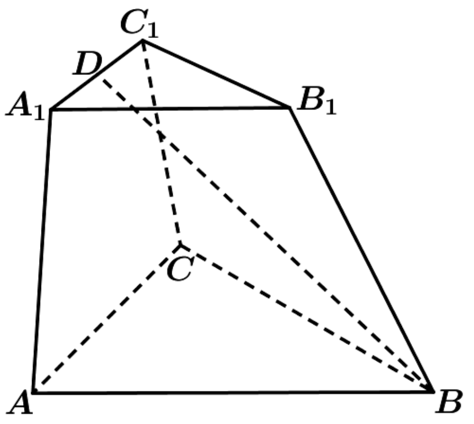
（2）当k变化时，若总有$k_1+k_2=0$，求b的值.

20．已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$\sqrt{6S_n}$是a_n与a_n+3的等比中项.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(a_n-2)2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，若对于任意$n\geq2,n\in\mathrm{N}^*$，均有$(T_n-5)\lambda\geq6n^2-31n+35$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

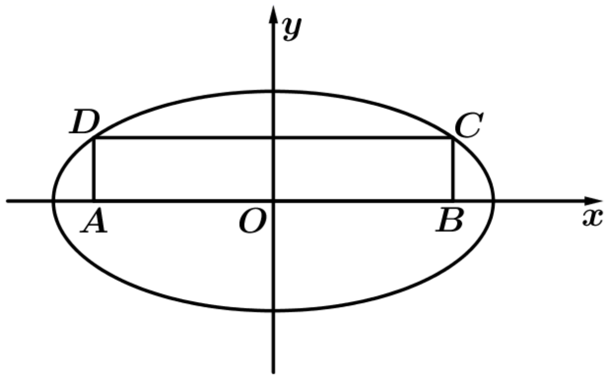
21．如图，在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，底面$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，侧面ACC_1A_1为等腰梯形，且$A_1C_1=AA_1=1$，D为A_1C_1的中点．



（1）证明：$AC\perp BD$；

（2）记二面角A_1-AC-B的大小为θ，$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$时，求直线$AA_1$与平面$BB_1C_1C$所成角的正弦值的取值范围．

22．已知①如图，长为$2\sqrt{3}$，宽为$\frac{1}{2}$的矩形$ABCD$，以A、B为焦点的椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$恰好过$CD$两点



②设圆$(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$的圆心为S，直线l过点$T(\sqrt{3},0)$，且与x轴不重合，直线l交圆S于CD两点，过点T作SC的平行线交SD于M，判断点M的轨迹是否椭圆

（1）在①②两个条件中任选一个条件，求椭圆M的标准方程；

（2）根据（1）所得椭圆M的标准方程，过椭圆M右焦点F作与坐标轴都不垂直的直线l交椭圆PQ两点，在x轴上是否存在点S，使得$\vec{SP}\cdot\vec{SQ}$为定值．

参考答案

1．A

【分析】

过点$P(2,-1)$且与原点O距离最远的直线垂直于直线OP，再由点斜式求解即可

【详解】

过点$P(2,-1)$且与原点O距离最远的直垂直于直线OP，

$\because k_{OP}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore$过点$P(2,-1)$且与原点O距离最远的直线的斜率为$k=2$，

$\therefore$过点$P(2,-1)$且与原点O距离最远的直线方程为：

$y+1=2(x-2)$，即$2x-y-5=0$.

故选：A

2．D

【分析】

由$\log_2 a_n-1=\log_2 a_{n+1}(n\in N)$，转化为$\frac{a_n}{2}=a_{n+1}$，再由$a_2+a_4+a_6+\ldots\ldots+a_{2n}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2}+\frac{a_5}{2}+\ldots+\frac{a_{2n-1}}{2}$求解.

【详解】

因为数列$\{a_n\}$满足$\log_2 a_n-1=\log_2 a_{n+1}(n\in N)$，

所以$\log_2 a_{n+1}=\log_2\frac{a_n}{2}$，即$\frac{a_n}{2}=a_{n+1}$，

因为$a_1+a_3+a_5+\ldots\ldots+a_{2n+1}=2^n$，

所以$a_2+a_4+a_6+\ldots\ldots+a_{2n}$，

$=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2}+\frac{a_5}{2}+\ldots+\frac{a_{2n-1}}{2}=2^{n-1}$，

所以$\log_2(a_2+a_4+a_6+\ldots\ldots+a_{2n})$，

$=\log_2 2^{n-1}=n-1$，

故选：D

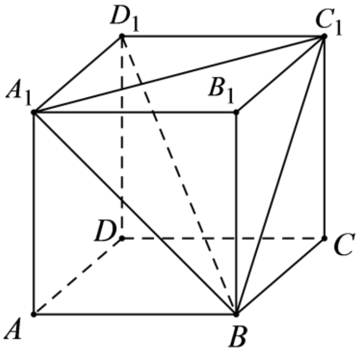
3．B

【分析】

利用等体积法有$V_{D_1-A_1BC_1}=V_{B-A_1C_1D_1}$求点面距即可.

【详解】

如图，设D_1到平面A_1BC_1的距离为h，



$\because V_{D_1-A_1BC_1}=V_{B-A_1C_1D_1}$，即$\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1C_1D_1}\cdot BB_1$，

$\therefore \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\times\sin 60°=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2$，可得$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：B.

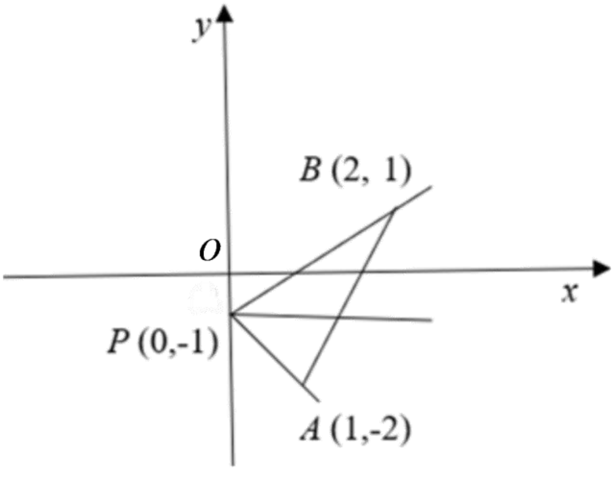
4．A

【分析】

过定点的直线与线段恒有公共点，数形结合，求斜率的取值范围即可.

【详解】

根据题意画图如下：



$k_{PA}=\frac{-2-(-1)}{1-0}=-1, k_{PB}=\frac{1-(-1)}{2-0}=1$,在射线$PA$逆时针旋转至射线$PB$时斜率逐渐变大,

直线 l 与线段 AB 总有公共点，所以 $-1 \le k \le 1$.

故选:A.

5．D

【分析】

当点 P 位于短轴的端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，要使椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在一点 P 满足 $F_1P \perp F_2P$，只要 $\angle F_1PF_2$ 最大时大于等于 $\frac{\pi}{2}$ 即可，从而可得出答案.

【详解】

解：当点 P 位于短轴的端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，

要使椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上存在一点 P 满足 $F_1P \perp F_2P$，

只要 $\angle F_1PF_2$ 最大时大于等于 $\frac{\pi}{2}$ 即可，

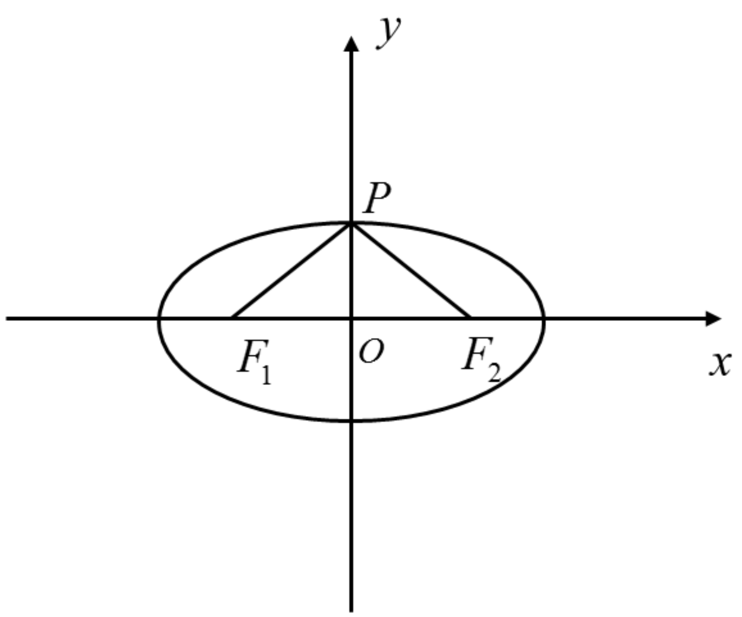
即当点 P 位于短轴的端点时，$\angle OPF_1 \ge \frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin\angle OPF_1=\frac{c}{a}\ge\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又椭圆的离心率 $0<e<1$，

所以椭圆的离心率的范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

故选：D.



6．D

【分析】

化简数列的关系式，利用累乘法求解数列的通项公式即可．

【详解】

数列$\{a_n\}$满足$(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n$，且$a_2=\frac{1}{3}$，

$\therefore a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n+2}$，

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n+1}$，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n}$，$\cdots$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}$，

累乘可得：$\frac{a_n}{a_{n-1}}\bullet\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n+1}\bullet\frac{n-1}{n}\bullet\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{2}{3}$，

可得：$a_n=\frac{2}{n+1}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{n+1}$．

故选：D．

7．B

【分析】

建立空间直角坐标系，用向量法求异面直线所成角的余弦值即可．

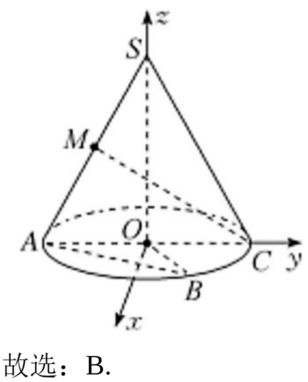
【详解】

以过点O且垂直面SAC的直线为x轴，以OC,OS所在直线分别y轴，z轴，建立空间直角坐标系，如图所示，设$OC=2$，

则$A(0,-2,0),B(\sqrt{3},1,0),C(0,2,0)$，$M=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},3,0),\overrightarrow{CM}=(0,-3,\sqrt{3})$，

设异面直线AB与CM所成的角为θ，

则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CM}\right\rangle\right|=\frac{\left|\sqrt{3}\times0+3\times(-3)+0\times\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+9}\times\sqrt{9+3}}=\frac{3}{4}$.



故选：B.

8．C

【分析】

实数x，y满足$x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，通过讨论x，y得到其图象是椭圆、双曲线的一部分组成的图形，借助图象分析可得$\left|\sqrt{3}x+y-6\right|$的取值就是图象上一点到直线$\sqrt{3}x+y-6=0$距离范围的 2 倍，求出切线方程根据平行直线距离公式算出最小值，和最大值的极限值即可得出答案.

【详解】

因为实数x，y满足$x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$，

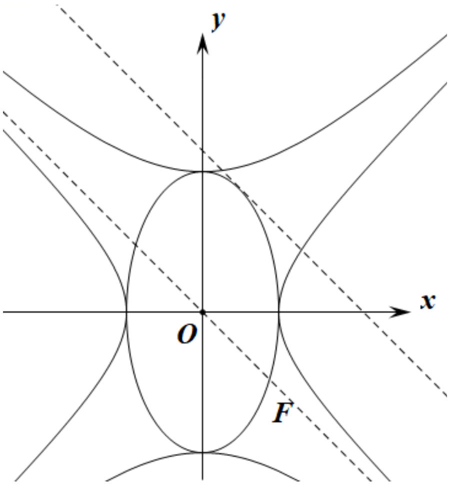
所以当$x\geq 0, y\geq 0$时，$\frac{y^2}{3}+x^2=1$，其图象是位于第一象限，焦点在y轴上的椭圆的一部分（含点$\left(0,\sqrt{3}\right),(1,0)$），

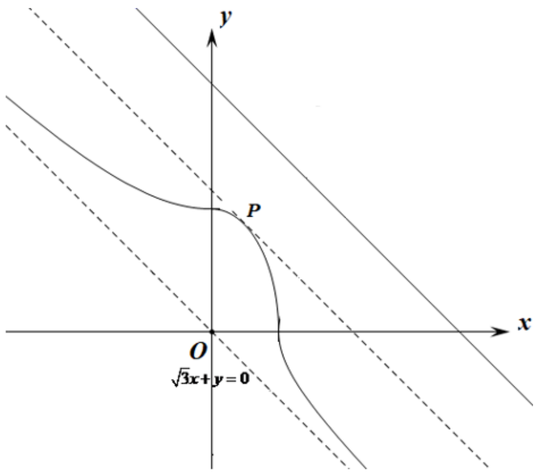
当$x>0, y<0$时，$x^2-\frac{y^2}{3}=1$其图象是位于第四象限，焦点在x轴上的双曲线的一部分，

当$x<0, y>0$时，$\frac{y^2}{3}-x^2=1$其图象是位于第二象限，焦点在y轴上的双曲线的一部分，

当$x<0, y<0$时，$-\frac{y^2}{3}-x^2=1$其图象不存在，

作出椭圆和双曲线的图象，其中$x|x|+\frac{y|y|}{3}=1$图象如下：





任意一点(x,y)到直线$\sqrt{3}x+y-6=0$的距离$d=\frac{\left|\sqrt{3}x+y-6\right|}{2}$

所以$\left|\sqrt{3}x+y-6\right|=2d$，结合图象可得$\left|\sqrt{3}x+y-6\right|$的范围就是图象上一点到直线

$\sqrt{3}x+y-6=0$距离范围的 2 倍，

双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$\frac{y^2}{3}-x^2=1$其中一条渐近线$\sqrt{3}x+y=0$与直线$\sqrt{3}x+y-6=0$平行

通过图形可得当曲线上一点位于P时，$2d$取得最小值，无最大值，$2d$小于两平行线

$\sqrt{3}x+y=0$与$\sqrt{3}x+y-6=0$之间的距离3的2倍，

设$\sqrt{3}x+y+c=0(c<0)$与$\frac{y^2}{3}+x^2=1$其图像在第一象限相切于点P，

由$\begin{cases}\sqrt{3}x+y+c=0\\ \frac{y^2}{3}+x^2=1\end{cases}\Rightarrow 6x^2+2\sqrt{3}cx+c^2-3=0$

因为$\Delta=\left(2\sqrt{3}c\right)^2x-4\times6\times\left(c^2-3\right)=0\Rightarrow c=-\sqrt{6}$或$c=\sqrt{6}$（舍去）

所以直线$\sqrt{3}x+y-\sqrt{6}=0$与直线$\sqrt{3}x+y-6=0$的距离为$\frac{\left|-6+\sqrt{6}\right|}{2}$

此时$\left|\sqrt{3}x+y-4\right|=2d=6-\sqrt{6}$，

所以$\left|\sqrt{3}x+y-4\right|$的取值范围是$\left[6-\sqrt{6},6\right)$.

故选：C.

9．AB

【分析】

假设a_n最大，则有$\begin{cases}a_n\ge a_{n+1},\\ a_n\ge a_{n-1},\end{cases}$解不等式组，可求出$n$的范围，从而可得答案

【详解】

假设a_n最大，则有$\begin{cases}a_n\ge a_{n+1},\\ a_n\ge a_{n-1},\end{cases}$即$(n+1)(\frac{7}{8})^n\geqslant(n+2)(\frac{7}{8})^{n+1}$且$(n+1)(\frac{7}{8})^n\geqslant n(\frac{7}{8})^{n-1}$，

所以$\begin{cases}(n+1)\ge(n+2)(\frac{7}{8})\\ (n+1)(\frac{7}{8})\ge n\end{cases}$，即 $6\le n\le 7$，所以最大项为第 6 项和第 7 项.

故选：AB

10．BD

【分析】

设出直线l的方程，结合勾股定理求得直线l的斜率，进而求得直线l的方程.

【详解】

圆心为原点，半径为5，

依题意可知直线l的斜率存在，

设直线l的方程为$y-5=k\left(x-5\right)$，即$kx-y+5-5k=0$，

所以$\frac{|5-5k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}\Rightarrow k=2$或$k=\frac{1}{2}$.

所以直线l的方程为$2x-y+5-5\times2=0$或$\frac{1}{2}x-y+5-5\times\frac{1}{2}=0$，

即$2x-y-5=0$或$x-2y+5=0$.

故选：BD

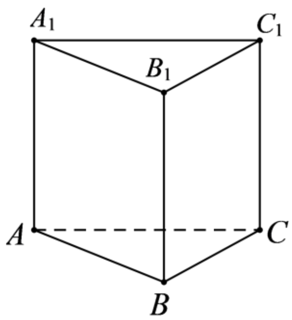
11．ACD

【分析】

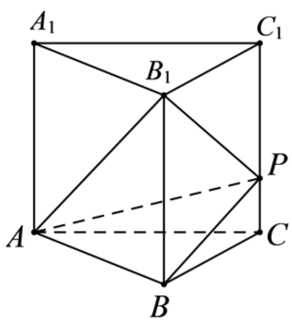
根据向量的线性关系，结合已知及正三棱柱的性质，分别判断$\lambda=1$、$\mu=1$时P所在位置，进而判断各选项的正误.

【详解】

由题设，P在面BCC_1B_1上，$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$为正三角形且正三棱柱的侧面都是正方形，它们的边长均为1，

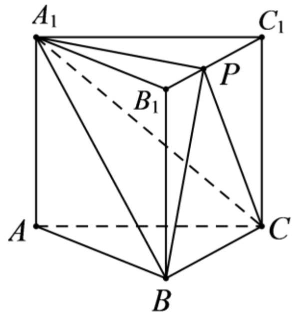


当$\lambda=1$时，显然P在线段CC_1上运动，则$\triangle PBB_1$的面积是定值，而$PB_1=\sqrt{1+(1-\mu)^2}$，$PA=\sqrt{1+\mu^2}$，即$\triangle PAB_1$的周长为$\sqrt{2}+\sqrt{1+(1-\mu)^2}+\sqrt{1+\mu^2}$不为定值，故A正确，B错误；



当$\mu=1$时，显然P在线段B_1C_1上运动，则$\triangle PBC$的面积是定值，而$B_1C_1//BC$，$B_1C_1\not\subset$面

A_1BC， $BC \subset$ 面 A_1BC，所以 $B_1C_1//$ 面 A_1BC，即 P 到面 A_1BC 距离不变，有三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值，故 C、D 正确.



故选：ACD

12．BC

【分析】

A 根据直径端点坐标写出圆的方程即知正误；B 求 AB 中点及 k_{AB} 直接写出中垂线方程；C 抛物线上设任意点，应用两点距离公式及二次函数的性质求距离最值；D 由双曲线方程确定参数，结合其性质判断各分支上与左焦点 $F_1\left(-3,0\right)$ 距离为 5 的点的个数即可.

【详解】

A：以 $A\left(1,2\right)$， $B\left(3,4\right)$ 为直径的圆：圆心为 $(2,3)$，半径为 $\sqrt{2}$，即方程为

$(x-2)^2+(y-3)^2=x^2-4x+4+y^2-6y+9=2$，而 $\left(x-1\right)\left(x-2\right)+\left(y-3\right)\left(y-4\right)=$

$x^2-3x+2+y^2-7y+12=0$，显然不是圆的方程，错误；

B：AB 中点为 $(2,3)$ 且 $k_{AB}=1$，则 AB 的垂直平分线方程为 $y-3=-(x-2)$，整理得 $x+y-5=0$，正确；

C：设 $P(x,y)$ 在抛物线上，则 $PM^2=(x-\frac{5}{3})^2+y^2=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{25}{9}=(x-\frac{2}{3})^2+\frac{21}{9}$，故当 $x=\frac{2}{3}$ 有最小值 $PM=\frac{\sqrt{21}}{3}$， 正确；

D：由双曲线方程知： $a=2,c=3$，显然左焦点 F_1 到右顶点的距离为 5，易知右分支上不存在其它点与 F_1 的距离为 5，而左分支上存在两个点与 F_1 距离为 5，故共有 3 个点，错误.

故选：BC

13．0

【分析】

计算$a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$的周期，然后计算即可.

【详解】

由$y=\sin\frac{n\pi}{2}$的最小正周期为4，即$a_1+a_2+a_3+a_4=0$

由$2019=504\times4+3$

所以$S_{2019}=504\times(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2+a_3=-a_4=-\sin2\pi=0$

故答案为：0

14．$\frac{9}{2}\sqrt{2}$

【分析】

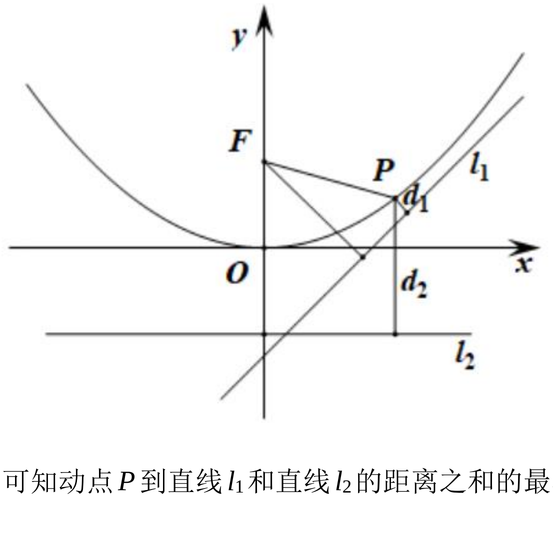
由题知直线 l_2:y=－4 为抛物线的准线，则 P 到直线 l_2 的距离为其到焦点的距离，再利用数形结合即得.

【详解】

设抛物线$x^2=16y$的焦点为F，则$F(0,4)$，又直线 l_2:y=－4 为其准线，

∴P 到直线 l_2 的距离为$d_2=|PF|$，

设 P 到直线 l_1 的距离为d_1，如图，



可知动点P到直线l_1和直线l_2的距离之和的最小值为点$F(0,4)$到直线l_1:x－y－5=0的距离，

即$\frac{|0-4-5|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

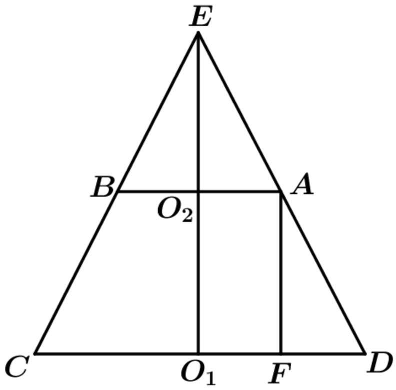
15．$\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$　　6π

【分析】

将圆台看成是圆O_1为底的大圆锥切去圆O_2为底的小圆锥，则圆台体积为大圆锥体积减去小圆锥体积，圆台侧面积为大圆锥侧面积减去小圆锥侧面积.

【详解】

将圆台看成是圆O_1为底的大圆锥切去圆O_2为底的小圆锥，大小圆锥的顶点为E，如图所示，在经过$ABCD$的轴截面上，从A点做垂线$AF\perp CD$于F，显然$AF//O_1O_2$且$AF=O_1O_2$.



$\because AB=2$，$CD=2AB=4$

$\therefore O_2A=\frac{1}{2}AB=1$，$O_1D=\frac{1}{2}CD=2$，$O_2A=\frac{1}{2}O_1D$

又$\because O_2A//O_1D$

$\therefore O_2A$为$\triangle O_1DE$的O_1D边的中位线，$O_1O_2=O_2E=\frac{1}{2}O_1E$

$\because \cos\angle FDA=\frac{FD}{AD}=\frac{1}{2}$，得$\angle FDA=\frac{\pi}{3}$

则$\tan\angle FDA=\tan\angle O_1DE=\frac{O_1E}{O_1D}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，解得$O_1E=2\sqrt{3}$

$\therefore O_2E=2\sqrt{3}$

则圆台的体积为圆O_1为底，高为O_1E的圆锥体积V_{CDE}减去以圆O_2为底，高为O_2E的圆锥体积V_{ABE}，即 $V=V_{CDE}-V_{ABE}=\frac{1}{3}\pi O_1D^2\cdot O_1E-\frac{1}{3}\pi O_2A^2\cdot O_2E=\frac{\pi}{3}\left(2^2\times2\sqrt{3}-1^2\times\sqrt{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$

圆台的侧面积$S=\frac{1}{2}\cdot2\pi O_1D\cdot ED-\frac{1}{2}\cdot2\pi O_2A\cdot EA=\pi\cdot\left(2\times4-1\times2\right)=6\pi$.

故答案为：$\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$；6π.

16．4

【分析】

首先根据几何关系求得点M的轨迹是以原点为圆心，2 为半径的圆周，再根据圆心到直线的距离加上半径为点M到直线$x+y-2\sqrt{2}=0$的距离的最大值，最后求解即可.

【详解】

由题意，延长PF_2,F_1M交于一点N，

由于$F_1M\perp PM$，且PM为$\angle F_1PF_2$平分线，

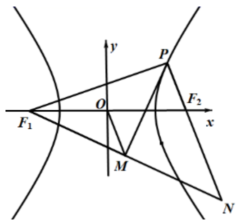
所以$|PF_1|=|PN|$，且M点为线段F_1N的中点，

不妨假设点P在双曲线的左支上，由于$|PF_1|-|PF_2|=2a=4$，

故$|PN_1|-|PF_2|=|F_2N|=4$，

由于O,M分别为F_1F_2,F_1N的中点，

所以$|OM|=\dfrac{1}{2}|F_2N|=2$



故点M的轨迹为以原点为圆心，2 为半径的圆周，

轨迹方程为：$x^2+y^2=4$，

点M到直线$x+y-2\sqrt{2}=0$的距离的最大值为原点到直线的距离加上半径 2，

即$\dfrac{|-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}+2=4$，

故答案为：4.

【点睛】

本题主要考查根据几何关系求得动点的轨迹，再根据直线与圆的位置关系求得最值问题，对学生的综合能力提出较高的要求，主要考查的思想方法有，数形结合，转化与划归思想等等.

17．

（1）$\lambda=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{11}{2}$

（2）不存在，理由见解析

【分析】

（1）先由 $a_2=-1$，求出 λ，在由递推公式求出 a_3 的值；

（2）先表示出 a_1, a_2, a_3, 求解 λ，即可判断.

（1）

$\because a_{n+1}=(\lambda-3)a_n+2^n(n\in N^*)$及 $a_1=2$，$a_2=-1$，$\therefore a_2=(\lambda-3)a_1+2$，

$\therefore \lambda=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore a_3=-\dfrac{3}{2}a_2+2^2$，$\therefore a_3=\dfrac{11}{2}$.

（2）

不存在.

$\because a_1=2$，$a_{n+1}=(\lambda-3)a_n+2^n$，

$\therefore a_2=(\lambda-3)a_1+2=2\lambda-4$，$a_3=(\lambda-3)a_2+4=2\lambda^2-10\lambda+16$.

若数列$\{a_n\}$为等差数列，则 $a_1+a_3=2a_2$，即 $2+2\lambda^2-10\lambda+16=2(2\lambda-4)$，

$\therefore \lambda^2-7\lambda+13=0$.$\because \varDelta=49-4\times13<0$，$\therefore$方程无实数解，

$\therefore \lambda$ 不存在，即不存在 λ 使$\{a_n\}$为等差数列.

18．

（1）$x^2+y^2=9$

（2）顶点 A 的轨迹方程为$(x-5)^2+y^2=16$，$(y\neq0)$；最大面积为12

【分析】

（1）由于 B、C 是定点，所以 BC 为直径的⊙M 半径最小，即周长最小，从而可求出⊙M 标准方程，

（2）由$|AB|=2|AC|$列方程化简可得顶点 A 的轨迹方程，从而可求出$\triangle ABC$面积的最大值

（1）

因为 B、C 是定点，所以 BC 为直径的⊙M 半径最小，即周长最小；

所以所求圆的标准方程为：$x^2+y^2=9$.

（2）

$|AB|=2|AC|\Rightarrow\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$，

$\Rightarrow x^2+y^2-10x+9=0 \Rightarrow (x-5)^2+y^2=16$，$(y\neq 0)$，

所以顶点 A 的轨迹方程为 $(x-5)^2+y^2=16$，$(y\neq 0)$；

所以当点 A 的坐标为 $(5,\pm 4)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值，最大面积为 $\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$

19.

（1）证明见解析

（2）$b=-2$

【分析】

（1）联立直线与抛物线的方程消元，然后韦达定理得到 $x_1x_2=-4$ 即可；

（2）利用 $k_1+k_2=\frac{2kx_1x_2+(2-b)\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}=0$ 可求出答案.

（1）

证明：将 $y=kx+2$ 代入 $x^2=2y$，

得 $x^2-2kx-4=0, \Delta=4k^2+16>0$.

设 $M\left(x_1,y_1\right), N\left(x_2,y_2\right)$，

则 $x_1x_2=-4$，

从 $d_1d_2=\left|x_1\right|\cdot\left|x_2\right|=\left|x_1x_2\right|=4$ 为定值.

（2）

由（1）知，$x_1+x_2=2k$，

从而 $k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}$

$=\frac{2kx_1x_2+(2-b)\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}$，

所以 $k_1+k_2=\frac{-8k+(2-b)\times 2k}{-4}=0$..

解得 $b=-2$.

所以当 $b=-2$ 时，

总有 $k_1+k_2=0$ 对任意 $k(k\neq 0)$ 恒成立

20.

（1）$a_n=3n$；

（2）$\left[\dfrac{3}{32},+\infty\right)$.

【分析】

（1）由已知可得$6S_n=a_n\left(a_n+3\right)$，令$n=1$可得$a_1$的值，当$n\geq 2$时，$6S_{n-1}={a_{n-1}}^2+3a_{n-1}$与已知条件两式相减可得$a_n-a_{n-1}=3$，由等差数列的通项公式即可求解；

（2）$b_n=\left(3n-2\right)2^{n-1}$，利用乘公比错位相减求得$T_n$，分离$\lambda$可得$\lambda\geq\dfrac{6n^2-31n+35}{\left(3n-5\right)2^n}=\dfrac{2n-7}{2^n}$对于任意$n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*$恒成立，设$g\left(n\right)=\dfrac{2n-7}{2^n}$，利用数列单调性的定义判断单调性求出最大值，即可求解.

（1）

因为$\sqrt{6S_n}$是a_n与a_n+3的等比中项，所以$6S_n=a_n\left(a_n+3\right)$，即$6S_n={a_n}^2+3a_n$，

当$n=1$时，$6a_1=a_1\left(a_1+3\right)$，因为$a_1\neq 0$，所以$a_1=3$，

当$n\geq 2$时，$6S_{n-1}={a_{n-1}}^2+3a_{n-1}$，

所以$6S_n-6S_{n-1}={a_n}^2+3a_n-{a_{n-1}}^2-3a_{n-1}$，整理可得：$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-3\right)=0$，

因为$a_n+a_{n-1}\neq 0$，所以$a_n-a_{n-1}=3$，

所以$\left\{a_n\right\}$是首项为3，公差为3的等差数列，所以$a_n=3+\left(n-1\right)\times 3=3n$，

所以$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=3n$.

（2）

由（1）知$a_n=3n$，所以$b_n=\left(3n-2\right)2^{n-1}$，

所以$T_n=1\cdot 2^0+4\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\cdots+\left(3n-2\right)2^{n-1}$，

$2T_n=1\cdot 2^1+4\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+\left(3n-2\right)2^n$，

所以$-T_n=1+3\cdot\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)-\left(3n-2\right)2^n$

$=1+3\times\dfrac{2^1\left(1-2^{n-1}\right)}{1-2}-\left(3n-2\right)2^n=\left(5-3n\right)2^n-5$，

所以$T_n=(3n-5)2^n+5$.

所以$(T_n-5)\lambda\geq 6n^2-31n+35$即$(3n-5)2^n\lambda\geq 6n^2-31n+35$，

即$\lambda\geq\dfrac{6n^2-31n+35}{(3n-5)2^n}$对于任意$n\geq 2,n\in N^*$恒成立，

设$g(n)=\dfrac{6n^2-31n+35}{(3n-5)2^n}=\dfrac{(3n-5)(2n-7)}{(3n-5)2^n}=\dfrac{2n-7}{2^n}$，

则$g(n+1)-g(n)=\dfrac{2n-5}{2^{n+1}}-\dfrac{2n-7}{2^n}=\dfrac{2n-5-4n+14}{2^{n+1}}=\dfrac{9-2n}{2^{n+1}}$，

当$n\leq 4$时，$g(n+1)>g(n)$；当$n\geq 5$时，$g(n+1)<g(n)$，

所以$g(n)_{\max}=g(5)=\dfrac{2\times 5-7}{2^5}=\dfrac{3}{32}$，所以$\lambda\geq\dfrac{3}{32}$.

所以实数λ的取值范围为$\left[\dfrac{3}{32},+\infty\right)$.

21．（1）证明见解析；（2）$\left[\dfrac{\sqrt{21}}{7},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right]$.

【分析】

（1）通过证明$AC\perp DM$，$AC\perp BM$得出$AC\perp$平面BDM，即可由线面垂直的性质得出；

（2）以M为坐标原点建立空间直角坐标系，可得$\angle DMB$为二面角A_1-AC-B的平面角，

$\angle DMB=\theta$，求出平面BB_1C_1C的法向量和$\overrightarrow{AA_1}$，利用向量关系可表示出直线AA_1与平面

BB_1C_1C所成角的正弦值，即可根据θ范围求出.

【详解】

（1）证明：如图，作AC的中点M，连接DM，BM，

在等腰梯形ACC_1A_1中，D，M为A_1C_1，AC的中点，

$\therefore AC\perp DM$，

在正$\triangle ABC$中，M为AC的中点，

$\therefore AC\perp BM$，

$\because AC\perp DM$，$AC\perp BM$，$DM\cap BM=M$，DM，$BM\subset$平面BDM，

$\therefore AC\perp$平面BDM，

又$BD\subset$平面BDM，$\therefore AC\perp BD$.

（2）解：$\because AC\perp$平面BDM，

在平面BDM内作$Mz\perp BM$，以M为坐标原点，以$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{Mz}$，分别为x，y，z，轴正向，如图建立空间直角坐标系，

$\because DM\perp AC$，$BM\perp AC$，$\therefore \angle DMB$为二面角A_1-AC-B的平面角，即$\angle DMB=\theta$，

$A(1,0,0)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C(-1,0,0)$，$D\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，$C_1\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

$A_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

设平面BB_1C_1C的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{CB}=\left(1,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{CC_1}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cdot y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot z=0\end{cases}$，

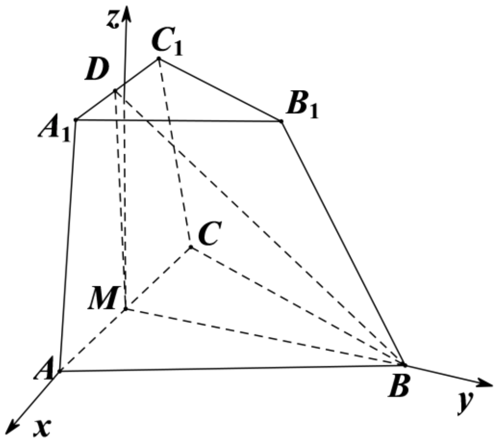
则可取$\vec{n}=\left(-\sqrt{3},1,\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$，又$\overrightarrow{AA_1}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

设直线AA_1与平面BB_1C_1C所成角为α，

$\therefore \sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{1+\cos\theta}}}$，

$\because \theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore \cos\theta\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，

$\therefore \sin\alpha\in\left[\dfrac{\sqrt{21}}{7},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right]$.



22．（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；（2）存在点$S\left(\frac{9\sqrt{3}}{8},0\right)$，使得$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}$为定值.

【分析】

（1）若选条件①：根据题意得出$|AB|=2\sqrt{3}=2c$，通过$\begin{cases}c=\sqrt{3}\\ \frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$求出$a$和$b$，从而求得椭圆$M$的标准方程；

若选条件②：根据圆的标准方程得出圆心和半径，从而得出$|SC|=|SD|=4$，再根据$MT//SC$得出$|MT|=|MD|$，所以$|MS|+|MT|=|MS|+|MD|=|SD|=4$，再根据椭圆的定义可知点$M$的轨迹为以$S\left(-\sqrt{3},0\right),T\left(\sqrt{3},0\right)$为焦点的椭圆，从而可求出椭圆$M$的标准方程；

（2）假设x轴上存在点$S\left(m,0\right)$，使得$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}$为定值，设直线$l$的方程为：$y=k\left(x-\sqrt{3}\right)$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，联立方程组并得出韦达定理$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{12k^2-4}{1+4k^2}$，再根据向量的坐标运算求得$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}=\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)+y_1y_2=\frac{\left(-4+m^2\right)+\left(11-8\sqrt{3}m+4m^2\right)k^2}{1+4k^2}$=定值，从而得出$4\left(-4+m^2\right)=11-8\sqrt{3}m+4m^2$，即可求出$m$的值，从而得出结论.

【详解】

解：（1）若选条件①：

由题可知，$|AB|=2\sqrt{3}=2c$，$A\left(-\sqrt{3},0\right),B\left(\sqrt{3},0\right)$，$C\left(\sqrt{3},\frac{b^2}{a}\right)$，

则$\begin{cases} c=\sqrt{3} \\ \dfrac{b^2}{a}=\dfrac{1}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得：$a=2,b=1$，

所以椭圆M的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

若选条件②：

由于圆$(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$的圆心为S，则$S\left(-\sqrt{3},0\right)$，半径$r=4$，

$\because C,D$都在圆上，则$|SC|=|SD|=r=4$，所以$\triangle CSD$为等腰三角形，

而$MT//SC$，则$\angle MTD=\angle SCD=\angle MDT$，

所以$\triangle MDT$为等腰三角形，则$|MT|=|MD|$，

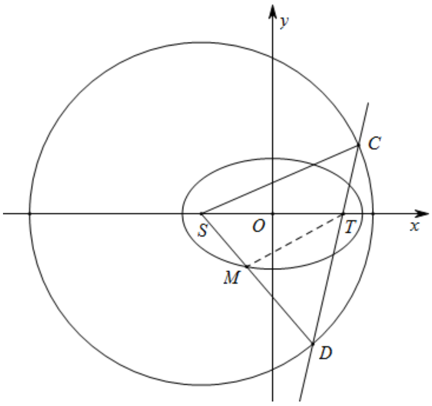
$\therefore |MS|+|MT|=|MS|+|MD|=|SD|=4$,

$\therefore |MS|+|MT|=4$，其中$S\left(-\sqrt{3},0\right),T\left(\sqrt{3},0\right)$，

由椭圆的定义可知，点M的轨迹为以$S\left(-\sqrt{3},0\right),T\left(\sqrt{3},0\right)$为焦点的椭圆，

可得$2a=4,c=\sqrt{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

所以椭圆M的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\left(y\neq 0\right)$；



（2）由题可知，假设x轴上存在点$S\left(m,0\right)$，使得$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}$为定值，

由于直线l过椭圆M右焦点$F\left(\sqrt{3},0\right)$，

可设直线l的方程为：$y=k\left(x-\sqrt{3}\right)$，且设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k\left(x-\sqrt{3}\right)\end{cases}$，消去$y$得：$\left(1+4k^2\right)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{12k^2-4}{1+4k^2}$，

$\therefore y_1y_2=k\left(x_1-\sqrt{3}\right)\cdot k\left(x_2-\sqrt{3}\right)=k^2x_1x_2-\sqrt{3}k^2\left(x_1+x_2\right)+3k^2$，

$\because \overrightarrow{SP}=\left(x_1-m,y_1\right),\overrightarrow{SQ}=\left(x_2-m,y_2\right)$，

$\therefore \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}=\left(x_1-m\right)\left(x_2-m\right)+y_1y_2$

$=\left(1+k^2\right)x_1x_2-\left(\sqrt{3}k^2+m\right)\left(x_1+x_2\right)+m^2+3k^2$

$=\left(1+k^2\right)\dfrac{\left(12k^2-4\right)}{1+4k^2}-\left(\sqrt{3}k^2+m\right)\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}+m^2+3k^2$

$=\dfrac{\left(-4+m^2\right)+\left(11-8\sqrt{3}m+4m^2\right)k^2}{1+4k^2}$=定值，

$\therefore 4\left(-4+m^2\right)=11-8\sqrt{3}m+4m^2$，

解得：$m=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$，

所以在x轴上存在点$S\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{8},0\right)$，使得$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}$为定值.