# 2005年北京高考卷(理)单峰函数题思路分析

312000 浙江省绍兴越秀外国语职业学院 朱林霞

题目: 设$f(x)$是定义在$[0,1]$上的函数, 若存在$x^*\in(0,1)$, 使得$f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增, 在$[x^*,1]$上单调递减, 则称$f(x)$为$[0,1]$上的单峰函数, $x^*$为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间.

对任意的$[0,1]$上的单峰函数$f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(I) 证明: 对任意的$x_1$、$x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 若$f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则$(0,x_2)$为含峰区间; 若$f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则$(x_1,1)$为含峰区间;

(II) 对给定的$r\,(0<r<0.5)$, 证明: 存在$x_1$、$x_2\in(0,1)$, 满足$x_2-x_1\geqslant 2r$, 使得由(I)所确定的含峰区间的长度不大于$0.5+r$;

(III) 选取$x_1$、$x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 由(I)可确定含峰区间为$(0,x_2)$或$(x_1,1)$, 在所得的含峰区间内选取$x_3$, 由$x_3$与$x_1$或$x_3$与$x_2$类似地可确定一个新的含峰区间. 在第一次确定的含峰区间为$(0,x_2)$的情况下, 试确定$x_1$、$x_2$、$x_3$的值, 满足两两之差的绝对值不小于0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到0.34 (区间长度等于区间的右端点与左端点之差).

这是一道以函数知识为载体, 综合考查各种能力的创新试题, 是考生具有公平竞争机会的一个良好平台.

本题首先考查的是数学交流能力, 就是过好"审题"关, 把题目的意思读懂, 也就是把题目中的外界信息正确地反映到考生的主观头脑中来, 即波利亚在《怎样解题》中提到的"弄清问题", 正如波利亚所指出的: "回答一个你尚未弄清的问题是愚蠢的", 不少考生由于没有弄清问题就急于解题, 所以往往以失败告终. 那么怎样去"弄清问题"呢? "首先必须了解问题的文字叙述, ……, 未知数是什么? 已知数据是什么? 条件是什么? 如果问题和某一图形有关, 那么他应该画张图, 并在上面标出未知数与已知数据."

问题(I)的思路分析: 第(I)小题的题意容易弄清, 而且按照波利亚的说法, 确实应该根据题意画张图, 图中标出有关数据. 对任意的$x_1$、$x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 若$f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则可以画出图1和图2.

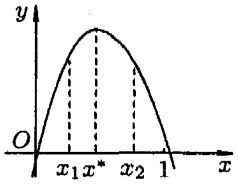


图 1

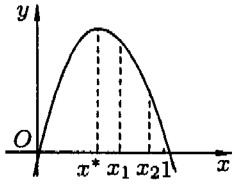


图 2

由图可以看出, 区间$(x_1,1)$不一定包含峰点$x^*$, 而区间$(0,x_2)$一定包含峰点$x^*$,

故含峰区间为$(0,x_2)$. 若$f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则可以画出图3和图4.

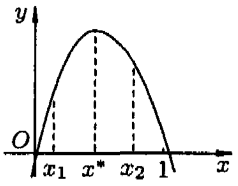


图 3

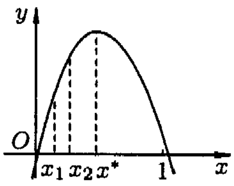


图 4

区间$(0,x_2)$不一定包含峰点$x^*$, 而区间$(x_1,1)$一定包含峰点$x^*$, 故$(x_1,1)$为含峰区间. 但这仅是从几何直观得到的结论, 不能替代命题的证明. 如何证明? 这类命题看似简单, 却又很难说清楚, 给人一种"秀才碰到兵, 有理说不清"的感觉, 而极大多数考生根据经验, 就会想到用反证法, 于是得到下面证法.

设$x^*$为$f(x)$的峰点, 则由单峰函数定义可知, $f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增, 在$[x^*,1]$上单调递减.

当$f(x_1)\geqslant f(x_2)$时, 假设$x^*\notin(0,x_2)$, 则$x_1<x_2<x^*$, 从而$f(x^*)\geqslant f(x_2)>f(x_1)$, 这与$f(x_1)\geqslant f(x_2)$矛盾, 所以$x^*\in(0,x_2)$, 即$(0,x_2)$是含峰区间.

当$f(x_1)\leqslant f(x_2)$时, 假设$x^*\notin(x_1,1)$, 则

$x^* \leqslant x_1 < x_2$, 从而$f(x^*) \geqslant f(x_1) > f(x_2)$, 这与$f(x_1) \leqslant f(x_2)$矛盾, 所以$x^* \in (x_1, 1)$, 即$(x_1, 1)$是含峰区间.

问题(Ⅱ)的思路分析: 第(II)小题是证存在性, 对给定的$r(0 < r < 0.5)$, 在$(0,1)$总可以找到$x_1$、$x_2$, 使得$x_2 - x_1 \geqslant 2r$, 且含峰区间的长度不大于$0.5 + r$, 如何去找? 本世纪著名的数学家希尔伯特Hilbert (1862-1943) 曾经说: “在讨论数学问题时, 我相信特殊化比一般化起着更重要的作用. 我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因, 就在于这样的事实, 即有些比手头问题更简单、更容易的问题没有完全解决, 或是完全没有解决. 这一切都有赖于找出这些比较容易的问题, 并且尽可能用完善的方法和能够推广的概念来解决它们.”

因为本题同时要满足两个条件: ① $x_2 - x_1 \geqslant 2r$, ② 含峰区间的长度$\leqslant 0.5 + r$, 因此不妨从特殊入手, 都取等号, 即$x_2 - x_1 = 2r$, 含峰区间的长度$= 0.5 + r$. 令$x_1 = 0.5 - r$, $x_2 = 0.5 + r$, 此时则满足$x_2 - x_1 = 2r$, 而区间$(0, x_2)$和$(x_1, 1)$的长度都为$0.5 + r$, 并且$(0, x_2)$和$(x_1, 1)$至少有一个为含峰区间, 这样特殊的$x_1$、$x_2$已找到, 那么又怎样去确定一般的$x_1$、$x_2$呢?

令$x_1 = 0.5 - r$, $x_2 = 0.5 + r$.

① 当峰点$x^* \in (0, x_1]$时(如图5), 则含峰区间为$(0, x_2)$, $x_1$、$x_2$可同时向左移, 并且$x_2$不要小于$x^*$, $x_1$平移的距离可比$x_2$移的距离多一点, 这样既满足了含峰区间$(0, x_2)$的长度$< 0.5 + r$的条件, 又满足了$x_2 - x_1 > 2r$的条件.

② 当峰点$x^* \in [x_2, 1)$时(如图6), 则含峰区间为$(x_1, 1)$, 只要将$x_1$、$x_2$同时向右移, 而且使$x_1$不要大于$x^*$, $x_2$平移的距离可比$x_1$移的距离多一点, 则满足了$x_2 - x_1 > 2r$的条件, 又满足了含峰区间$(x_1, 1)$的长度$< 0.5 + r$的条件.

③ 当峰点$x^* \in (x_1, x_2)$时(如图7), $x_1$、$x_2$既可以同时向左移, 也可以同时向右移, 向右移时, $x_1$不能大于$x^*$, 向左移时, $x_2$不能小于$x^*$. 向右移时, 含峰区间为$(x_1, 1)$, 它的长度$< 0.5 + r$, 只要$x_2$移动的距离比$x_1$移动的距离稍多一点, 就满足$x_2 - x_1 > 2r$的条件; 向左移时, 含峰区间为$(0, x_2)$, 它的长度$< 0.5 + r$, 只要$x_1$移动的距离比$x_2$移动的距离稍多一点, 则满足$x_2 - x_1 > 2r$的条件.

综上, 不论哪一种位置, 满足条件的$x_1$、$x_2$都一定存在.

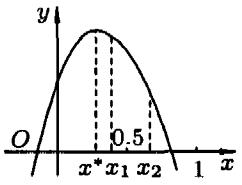


图 5

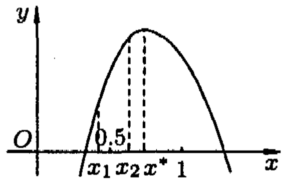


图 6

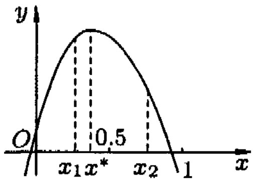


图 7

问题(Ⅲ)的思路分析: 也可以从特殊入手, 不妨设$x_1 = 0.5 - r$, $x_2 = 0.5 + r$, 则$x_1 + x_2 = 1$, 在含峰区间为$(0, x_2)$的情况下, $x_3$的位置可以有如图8、图9两种情况:

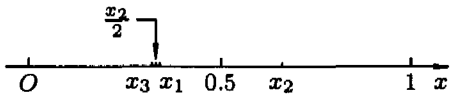


图 8

① 如图8, $x_1$在点$\frac{x_2}{2}$的右边, 取点$x_1$关于$\frac{x_2}{2}$的对称点$x_3$, 则$x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = x_2$, 那么新的含峰区间为$(0, x_1)$或$(x_3, x_2)$, 根据题设要求, 它们的长度都为0.34, $\therefore$ $x_1 = 0.34$, 则

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - 0.34 = 0.66,$$

$$x_3 = x_2 - x_1 = 0.66 - 0.34 = 0.32,$$

并且, 新的含峰区间的长度都是0.34,

$$x_1 - x_3 = 0.34 - 0.32 = 0.02,$$

$$x_2 - x_1 = 0.66 - 0.34 = 0.32,$$

两两之差的绝对值不小于0.02. 条件都满足.

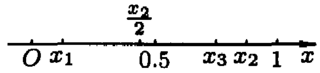


图 9

② 如图9, $x_1$在$\frac{x_2}{2}$的左边, 取点$x_1$关于$\frac{x_2}{2}$的对称点$x_3$, 则$x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = x_2$, 那么新的含峰区间为$(0, x_3)$或$(x_1, x_2)$, 根据题设要求, 它们的长度都为0.34, $\therefore$ $x_3 = 0.34$, 则$x_2 - x_1 = 0.34$, $x_2 + x_1 = 1$, 联立解之得

$$x_2 = 0.67, \ x_1 = 0.33,$$

(下转第1-5页)

• 建构的主体性与客观性, 应考虑建构不当与建构失败的情形.

• "认识结构的变革与重组"的过程中教师的作用.

③ 数学学习研究的两种方式:

• 从一般心理学的理论出发, 对数学学习的具体问题作解释.

• 从数学学习的具体过程出发, 研究学生学习的真实心理活动, 分析其认知过程、机制及心智变化. 形成数学学习理论.

当前应该大力提倡第二种方式.

(3) 追求好的数学教学.

① 教师数学素养较高是教好数学的必要条件.

② 好的数学教学方法必然是数学内容与教学方法的高度统一.

③ 成功的数学教学必然是对学生数学潜能的最大激发.

(4) 大力提升数学教师的专业发展.

① 提高数学学科功力是基石.

数学体系、数学理解、数学问题解决.

② 扎实数学教学的基本功.

• 处理数学教材的能力.

• 数学表达(口头的、文字的、符号的)能力.

• 运用各种数学教学手段的能力.

• 数学建模能力.

• 数学评价与诊断能力.

• 通用教育能力.

③ 加强学校教学研究的氛围.

• 学校数学教学质量与数学教师群体的学术氛围显著相关.

• 好的数学教学是学校全体数学教师共同努力的结果.

*4. 发挥现代信息技术在数学教学中的作用*

(1) 信息技术作为数学辅助教学的手段.

① 数值计算.

② 图像显示.

③ 情景表现.

④ 资源库.

(2) 数学学习与计算机算法的关联.

算法是在有限步骤内求解某一问题所使用的一组定义明确的规则.

推理实现的算法, 操作实现的算法.

算法的特征: ① 有穷性; ② 确切性; ③ 输入; ④ 输出; ⑤ 可行性.

(3) 计算机算法与知识贮备.

运用计算机主要算法必须具备的数学知识.

(由于计算机的不同题目可能牵涉到不同的数学知识, 在此难以穷尽, 因此以下表格中仅罗列了必须具备的数学知识)

| 计算机主要算法 | 必须具备的相关数学知识 |
|---|---|
| 高精度计算 | 竖式计算方法、进位方法 |
| 进制转换 | $(A_{s-1}\ \ A_{s-2}\ \ \cdots\ \ A_0)_k=A_{s-1}k^{s-1}+A_{s-2}k^{s-2}+\cdots+A_0k^0$, 求数列的和 |
| 排序 | 数列知识、数学归纳法 |
| 全排列与组合 | 排列组合知识、组合数学相关知识 |
| 枚举归纳 | 科学归纳法思想 |
| 递推 | 递推知识 |
| 递归 | 递归函数 |
| 搜索回溯 | 递推、递归 |
| 分治法 | |
| 贪心策略 | 最优理论 |
| 深度优先和广度优先 | 状态空间、深度优先和广度优先搜索 |
| 最小生成树 | 最小生成树 (prim 算法、Kruskal 算法) |
| 最短路径 | 最短路径问题 |
| 拓扑排序 | 离散数学、图论概念 |
| 关键路径 | 离散数学 |
| 回路问题 | 欧拉回路、哈密尔顿回路、旅行商问题、邮递员问题 |
| 网络流 | 连通图的割 |
| 动态规划思想 | 递推关系 |

(4) 以积极的态度使用现代信息技术.

① 技术在数学教学中的适用性.

(不可替代性、适切性、有效性)

② 实用技术的障碍.

入门难, 资料积累, 学校条件, 个人兴趣.

③ 上海数学教学一个可能的亮点.

(上接第1-44页)

$$x_3 - x_1 = 0.34 - 0.33 = 0.01 < 0.02,$$

与不小于0.02的条件矛盾, ∴ 舍去.

∴ 最后求的一组数为 $x_1 = 0.34$, $x_3 = 0.32$, $x_2 = 0.66$.

**参考文献**

[1] G.Polya. 怎样解题. 阎育苏译. 科技出版社. 1982.

[2] 陈自强. 数学解题思维方法导引. 中南工业大学出版社. 1995年.