山东省枣庄市2021届高三第二次模拟测试

数学试题

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共计40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 A＝$\left\{x \middle| y=\ln x\right\}$，B＝$\left\{y\in Z \middle| y=2\sin x\right\}$，则 $A\cap B$＝

A．(0，2]　　　B．[0，2]　　　C．{1，2}　　　D．{0，1，2}

2．命题“$\forall n\in N$，$n^2-1\in Q$”的否定为

A．$\forall n\in N$，$n^2-1\notin Q$

B．$\forall n\notin N$，$n^2-1\in Q$

C．$\exists n\in N$，$n^2-1\notin Q$

D．$\exists n\in N$，$n^2-1\in Q$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x+\ln 2}, & x\le 0 \\ f(x-3), & x>0 \end{cases}$，则 $f(2021)=$

A．$\dfrac{2}{e}$　　　B．$2e$　　　C．$\dfrac{2}{e^2}$　　　D．$2e^2$

4．已知点(1，1)在抛物线C：$y^2=2px(p>0)$上，则C的焦点到其准线的距离为

A．$\dfrac{1}{4}$　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　C．1　　　D．2

5．大数学家欧拉发现了一个公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，i是虚数单位，e为自然对数的底数．此公式被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，$(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^{2022}=$

（注：底数是正实数的实数指数幂的运算律适用于复数指数幂的运算）

A．1　　　B．－1　　　C．i　　　D．－i

6．若 $x^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_6(x+1)^6$，则 $a_3=$

A．20　　　B．－20　　　C．15　　　D．－15

7．医用口罩由口罩面体和拉紧带组成，其中口罩面体分为内、中、外三层．内层为亲肤材质（普通卫生纱布或无纺布），中层为隔离过滤层（超细聚丙烯纤维熔喷材料层），外层为特殊材料抑菌层（无纺布或超薄聚丙烯熔喷材料层）．根据国家质量监督检验标准，医用口罩的过滤率是重要的指标，根据长期生产经验，某企业在生产线状态正常情况下生产的医用口罩的过滤率 $x\sim N(0.9372，0.0139^2)$．若 $x\sim N(\mu，\sigma^2)(\sigma>0)$，则 $P(\mu-2\sigma<x\le\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<x\le\mu+3\sigma)=0.9973$，$0.97725^{50}\approx0.3164$．有如下命题：

甲：$P(x\le0.9)<0.5$；乙：$P(x<0.4)>P(x>1.5)$；丙：$P(x>0.9789)=0.00135$；丁：假设生产状态正常，记X表示一天内抽取的50只口罩中过滤率大于 $\mu+2\sigma$ 的数量，则 $P(X\ge1)\approx0.6$．其中假命题是

A．甲　　　B．乙　　　C．丙　　　D．丁

8．已知椭圆C与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同的左焦点 F_1、右焦点 F_2，点P是两曲线的一个交

点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$. 过 F_2 作倾斜角为 45° 的直线交 C 于 A，B 两点（点 A 在 x 轴的上方），且 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF_2}$ ，则 λ 的值为

A． $3+\sqrt{3}$　　B． $3+\sqrt{2}$　　C． $2+\sqrt{3}$　　D． $2+\sqrt{2}$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分. 在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9．已知 $a>0$， $b>0$， $a+b^2=1$，则

A． $a+b<\dfrac{5}{4}$　　B． $a-b>-1$　　C． $\sqrt{a}\cdot b\le\dfrac{1}{2}$　　D． $\dfrac{\sqrt{a}}{b-2}\ge-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

10．已知函数 $f(x)=\left|\sin x\right|+\sqrt{3}\left|\sin(x-\dfrac{\pi}{2})\right|$，则

A． $f(x)$ 在[$\dfrac{\pi}{2}$， π]上的最小值是 1

B． $f(x)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$

C．直线 $x=\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴

D．直线 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ 与 $f(x)$ 的图象恰有 2 个公共点

11．列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1170—1250 年)是意大利数学家，1202 年斐波那契在其代表作《算盘书》中提出了著名的“兔子问题”，于是得斐波那契数列，斐波那契数列可以如下递推的方式定义：用 $F(n)(n\in N^*)$ 表示斐波那契数列的第 n 项，则数列 $\{F(n)\}$ 满足： $F(1)=F(2)=1$， $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$. 斐波那契数列在生活中有着广泛的应用，美国 13 岁男孩 Aidan Dwyer 观察到树枝分叉的分布模式类似斐波那契数列，因此猜想可按其排列太阳能电池，找到了能够大幅改良太阳能科技的方法. 苹果公司的 Logo 设计，电影《达芬奇密码》等，均有斐波那契数列的影子. 下列选项正确的是

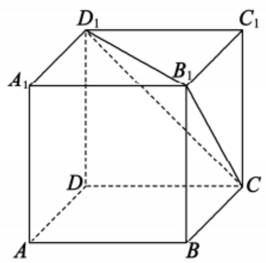
A． $[F(8)]^2=F(7)F(9)+1$

B． $F(1)+F(2)+\cdots+F(6)+1=F(8)$

C． $F(2)+F(4)+\cdots+F(2n)=F(2n+1)-2$

D． $[F(1)]^2+[F(2)]^2+\cdots+[F(n)]^2=F(n)\cdot F(n+1)$

12．如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是△B_1CD_1 内部（不包括边界）的动点. 若 BD⊥AP，则线段 AP 长度的可能取值为



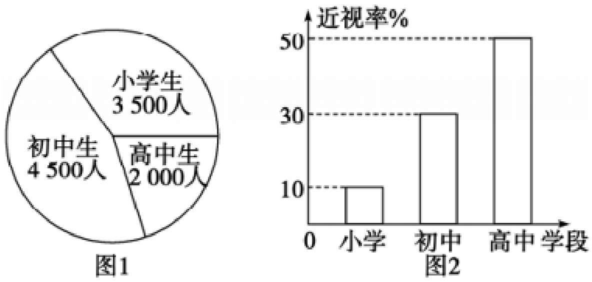
A． $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B． $\dfrac{6}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

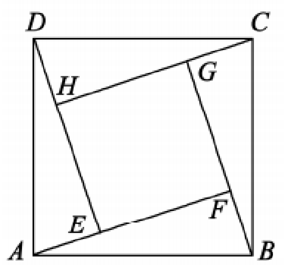
三、填空题（本大题共 4 小题， 每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图 1 和图 2 所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取 2%的学生进行调查，则抽取的高中生中近视人数为_______．

14．如图，由四个全等的三角形与中间的一个小正方形 EFGH 拼成的一个大正方形 ABCD 中，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AE}$，设 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y$ 的值为_______．



第 13 题



第 14 题

15．写出一个图象关于直线 $x=2$ 对称且在[0，2]上单调递增的偶函数 $f(x)=$_______．

16．2020 年 11 月 23 日国务院扶贫办确定的全国 832 个贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大突破．为了使扶贫工作继续推向深入，2021 年某原贫困县对家庭状况较困难的农民实行购买农资优惠政策．

（1）若购买农资不超过 2 000 元，则不给予优惠；

（2）若购买农资超过 2 000 元但不超过 5 000 元，则按原价给予 9 折优惠；

（3）若购买农资超过 5 000 元，不超过 5 000 元的部分按原价给予 9 折优惠，超过 5 000 元的部分按原价给予 7 折优惠．

该县家境较困难的一户农民预购买一批农资，有如下两种方案：

方案一：分两次付款购买，实际付款分别为 3 150 元和 4 850 元；

方案二：一次性付款购买．

若采取方案二购买这批农资，则比方案一节省_______元．

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$．记 $b_n=a_{n+1}+a_n$，求证：

（1）$\{b_n\}$ 是等比数列；

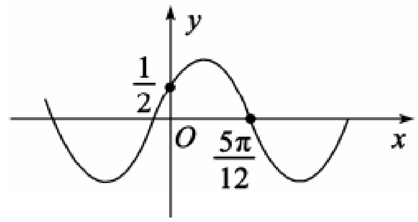
（2）$\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $\dfrac{b_n}{T_1\cdot T_2}+\dfrac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$．

18．（本小题满分 12 分）

若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$， $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示， $f(0)=\dfrac{1}{2}$， $f(\dfrac{5\pi}{12})=0$．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）在锐角△ABC 中，若 A＞B，$f(\dfrac{A-B}{2}-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\dfrac{A-B}{2}$，并证明 $\sin A>\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

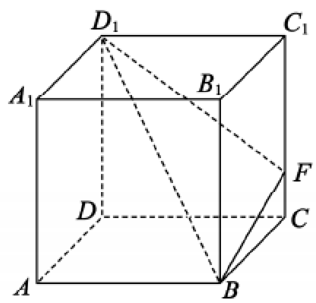


19．（本小题满分 12 分）

如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 F 在棱 CC_1 上，过 B，D_1，F 三点的正方体的截面 α 与直线 AA_1 交于点 E.

（1）找到点 E 的位置，作出截面 α（保留作图痕迹），并说明理由；

（2）已知 CF＝a，求 α 将正方体分割所成的上半部分的体积 V_1 与下半部分的体积 V_2 之比.



20．（本小题满分 12 分）

天问一号火星探测器于 2021 年 2 月 10 日成功被火星捕获，实现了中国在深空探测领域的技术跨越. 为提升探测器健康运转的管理水平，西安卫星测控中心组织青年科技人员进行探测器遥控技能知识竞赛，已知某青年科技人员甲是否做对每个题目相互独立，做对 A，B，C 三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示.

题目	A	B	C
做对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的奖金/元	1 000	2 000	3 000

规则如下：按照 A，B，C 的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题.

（1）求甲获得的奖金 X 的分布列及均值；

（2）如果改变做题的顺序，获得奖金的均值是否相同？如果不同，你认为哪个顺序获

得奖金的均值最大？（不需要具体计算过程，只需给出判断）

21．(本题满分 12 分)

已知动点 M 与两个定点 O(0，0)，A(3，0)的距离的比为 $\frac{1}{2}$，动点 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的轨迹方程，并说明其形状；

（2）过直线 $x=3$ 上的动点 P(3，p)($p\neq 0$)分别作 C 的两条切线 PQ、PR（Q、R 为切点），N 为弦 QR 的中点，直线 l：$3x+4y=6$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 E、F，求△NEF 的面积 S 的取值范围.

22．(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$，且 $f'(\frac{\pi}{2})=0$.

（1）求实数 a 的值，并判断 $f(x)$ 在(0，$\frac{\pi}{2}$)上的单调性；

（2）对确定的 $k\in N^{*}$，求 $f(x)$ 在[$2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\pi$]上的零点个数.

山东省枣庄市 2021 届高三第二次模拟测试

数学试题

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 A＝$\left\{x\middle|y=\ln x\right\}$，B＝$\left\{y\in Z\middle|y=2\sin x\right\}$，则 A I B＝

A．(0，2]　　B．[0，2]　　C．{1，2}　　D．{0，1，2}

答案：C

解析：集合 A＝$\left\{x\middle|y=\ln x\right\}$＝(0，+∞)，B＝$\left\{y\in Z\middle|y=2\sin x\right\}$＝{－2，－1，0，1，2}，所以 A I B＝{1，2}，故选 C．

2．命题“$\forall n\in N$，$n^2-1\in Q$”的否定为

A．$\forall n\in N$，$n^2-1\notin Q$　　B．$\forall n\notin N$，$n^2-1\in Q$

C．$\exists n\in N$，$n^2-1\notin Q$　　D．$\exists n\in N$，$n^2-1\in Q$

答案：C

解析：全称量词的否定，首先全称量词改为存在量词，其次否定结论，故选 C．

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+\ln 2}, & x\le 0\\ f(x-3), & x>0\end{cases}$，则 $f(2021)=$

A．$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　B．$2\mathrm{e}$　　C．$\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$　　D．$2\mathrm{e}^2$

答案：A

解析：$f(2021)=f(-1)=\mathrm{e}^{-1+\ln 2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，故选 A．

4．已知点(1，1)在抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$上，则 C 的焦点到其准线的距离为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

答案：B

解析：因为点(1，1)在抛物线 C 上，所以 1＝2p，p＝$\dfrac{1}{2}$，故 C 的焦点到其准线的距离为$\dfrac{1}{2}$，故选 B．

5．大数学家欧拉发现了一个公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，i 是虚数单位，e 为自然对数的底数．此公式被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，$(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})^{2022}=$

（注：底数是正实数的实数指数幂的运算律适用于复数指数幂的运算）

A．1　　　　　　B．－1　　　　　　C．i　　　　　　D．－i

答案：D

解析：$(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})^{2022}=[(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})^2]^{1011}=\mathrm{i}^{1011}=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，故选 D．

6．若 $x^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_6(x+1)^6$，则 a_3＝

A．20　　　　　　B．－20　　　　　　C．15　　　　　　D．－15

答案：B

解析：$[(x+1)-1]^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+\cdots+a_6(x+1)^6$，$a_3=C_6^3(-1)^3=-20$，故选 B．

7．医用口罩由口罩面体和拉紧带组成，其中口罩面体分为内、中、外三层．内层为亲肤材质（普通卫生纱布或无纺布），中层为隔离过滤层（超细聚丙烯纤维熔喷材料层），外层为特殊材料抑菌层（无纺布或超薄聚丙烯熔喷材料层）．根据国家质量监督检验标准，医用口罩的过滤率是重要的指标，根据长期生产经验，某企业在生产线状态正常情况下生产的医用口罩的过滤率 x~N(0.9372，0.0139^2)．若 x~N(μ，σ^2)($\sigma>0$)，则 P($\mu-2\sigma<x\leqslant\mu+2\sigma$)＝0.9545，P($\mu-3\sigma<x\leqslant\mu+3\sigma$)＝0.9973，$0.97725^{50}\approx0.3164$．有如下命题：

甲：P($x\leqslant$0.9)＜0.5；乙：P(x＜0.4)＞P(x＞1.5)；丙：P(x＞0.9789)＝0.00135；丁：假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 50 只口罩中过滤率大于 $\mu+2\sigma$ 的数量，则 P(X≥1)≈0.6．其中假命题是

A．甲　　　　　　B．乙　　　　　　C．丙　　　　　　D．丁

答案：D

解析：对于丁，P(X≥1)＝$1-C_{50}^0 0.02275^0 0.97725^{50}=1-0.3164\approx0.7$，故假命题是丁，选 D．

8．已知椭圆 C 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同的左焦点 F_1、右焦点 F_2，点 P 是两曲线的一个交点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$．过 F_2 作倾斜角为 45° 的直线交 C 于 A，B 两点（点 A 在 x 轴的上方），且 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF_2}$，则 λ 的值为

A．$3+\sqrt{3}$　　　　　　B．$3+\sqrt{2}$　　　　　　C．$2+\sqrt{3}$　　　　　　D．$2+\sqrt{2}$

答案：A

解析：首先求出椭圆 C 的离心率是 $e=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AF_2}$，所以 $\overrightarrow{AF_2}=\frac{1}{\lambda-1}\overrightarrow{AB}$，$\lambda>2$，

所以 $(\frac{1-\frac{1}{\lambda-1}}{1+\frac{1}{\lambda-1}})^2=\frac{\frac{2}{3}}{1+\tan45^\circ}$，解得 $\lambda=3+\sqrt{3}$，故选 A．

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9．已知 $a>0$，$b>0$，$a+b^2=1$，则

A．$a+b<\frac{5}{4}$　　B．$a-b>-1$　　C．$\sqrt{a}\cdot b\le\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{a}}{b-2}\ge-\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案：BCD

解析：首先可得 0＜b＜1，当$a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{1}{2}$时，$a+b=\frac{5}{4}$，故 A 错误；经判断，其他选项均正确，故选 BCD．

10．已知函数 $f(x)=|\sin x|+\sqrt{3}\left|\sin(x-\frac{\pi}{2})\right|$，则

A．$f(x)$在[$\frac{\pi}{2}$，π]上的最小值是　1

B．$f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$

C．直线$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$是$f(x)$图象的对称轴

D．直线$y=\frac{2}{\pi}x$与$f(x)$的图象恰有 2 个公共点

答案：ACD

解析：$f(x)=|\sin x|+\sqrt{3}|\cos x|$，$f(x+\pi)=|\sin x|+\sqrt{3}|\cos x|=f(x)$，而$f(x+\frac{\pi}{2})\ne f(x)$，故$f(x)$的最小正周期是$\pi$，B 错误；当$x\in$[$\frac{\pi}{2}$，$\pi$]时，$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，此时$x-\frac{\pi}{3}\in$[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{2\pi}{3}$]，所以$2\sin(x-\frac{\pi}{3})\in$[1，2]，故 A 正确；

$f(x)=\begin{cases}2\sin(x+\frac{\pi}{3}),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 2\sin(x-\frac{\pi}{3}),\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$，作出$f(x)$的图像，再作出直线$y=\frac{2}{\pi}x$的图像，可以判断出 C、D 都正确，故选 ACD．

11．列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1170—1250 年)是意大利数学家，1202 年斐波那契在其代表作《算盘书》中提出了著名的“兔子问题”，于是得斐波那契数列，斐波那契数列可以如下递推的方式定义：用$F(n)(n\in N^*)$表示斐波那契数列的第 n 项，则数列$\{F(n)\}$满足：$F(1)=F(2)=1$，$F(n+2)=F(n+1)+F(n)$．斐波那契数列在生活中有着广泛的应用，美国 13 岁男孩 Aidan Dwyer 观察到树枝分叉的分布模式类似斐波那契数列，因此猜想可按其排列太阳能电池，找到了能够大幅改良太阳能科技的方法．苹果公司的 Logo 设计，电影《达芬奇密码》等，均有斐波那契数列的影子．下列选项正确的是

A．$[F(8)]^2=F(7)F(9)+1$

B．$F(1)+F(2)+\cdots+F(6)+1=F(8)$

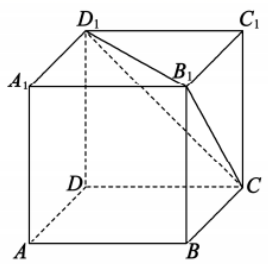
C．$F(2)+F(4)+\cdots+F(2n)=F(2n+1)-2$

D． $[F(1)]^2+[F(2)]^2+\cdots+[F(n)]^2=F(n)\cdot F(n+1)$

答案：BD

解析：选项 A，$[F(8)]^2=21^2$，$F(7)F(9)+1=13\times34+1$，显然$[F(8)]^2\neq F(7)F(9)+1$，A 错误；选项 C，当 n＝3 时，$F(2)+F(4)+F(6)=12$，$F(7)-2=13-2=11$，故$F(2)+F(4)+F(6)\neq F(7)-2$，C 错误．故选 BD．

12．如图，正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 是△B_1CD_1 内部（不包括边界）的动点．若 BD⊥AP，则线段 AP 长度的可能取值为



A． $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B． $\dfrac{6}{5}$

C． $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D． $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

答案：ABC

解析：根据 BD⊥平面 ACC_1A_1，设 O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，则平面 $ACC_1A_1\cap$平面 B_1CD_1＝O_1C，故点 P 在线段 O_1C 上运动，求得 O_1A＝O_1C＝$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，AC＝$\sqrt{2}$，点 A 到 O_1C 的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant$AP＜$\sqrt{2}$，故选 ABC．

三、填空题（本大题共 4 小题， 每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图 1 和图 2 所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取 2%的学生进行调查，则抽取的高中生中近视人数为_______．

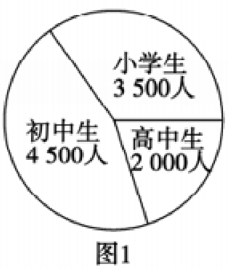


图1

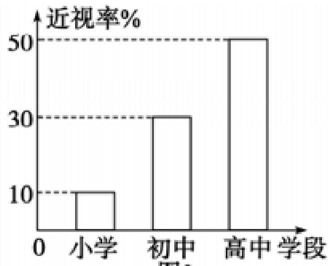
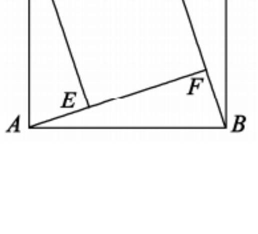


图2

答案：20

解析：2000×50%×2%＝20（人）

14．如图，由四个全等的三角形与中间的一个小正方形 EFGH 拼成的一个大正方形 ABCD 中，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AE}$，设$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则$x+y$的值为_______．



答案：$\dfrac{6}{5}$

解析：连接 BD 交 AF 于点 M，令 BF＝1，则 AF＝3，

$\tan\angle FBM=\tan(\angle ABF-45^\circ)=\dfrac{1}{2}$，所以 $FM=\dfrac{1}{2}$，$AM=\dfrac{5}{2}$，

根据等和线知识可得 $x+y=\dfrac{AF}{AM}=\dfrac{3}{\frac{5}{2}}=\dfrac{6}{5}$.

15．写出一个图象关于直线 $x=2$ 对称且在[0，2]上单调递增的偶函数 $f(x)$＝_______.

答案：答案不唯一，开放性试题，符合题意的均给分

解析：$-\cos\dfrac{\pi}{2}x$；$\left|\sin\dfrac{\pi}{4}x\right|$；$|x-4k|$，$x\in[4k-2，4k+2]$，$k\in Z$；$(x-4k)^2$，$x\in[4k-2，4k+2]$，$k\in Z$ 等（符合题意的均给分，注意 $\left|\tan\dfrac{\pi}{4}x\right|$ 不正确）

16．2020 年 11 月 23 日国务院扶贫办确定的全国 832 个贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大突破．为了使扶贫工作继续推向深入，2021 年某原贫困县对家庭状况较困难的农民实行购买农资优惠政策．

（1）若购买农资不超过 2 000 元，则不给予优惠；

（2）若购买农资超过 2 000 元但不超过 5 000 元，则按原价给予 9 折优惠；

（3）若购买农资超过 5 000 元，不超过 5 000 元的部分按原价给予 9 折优惠，超过 5 000 元的部分按原价给予 7 折优惠．

该县家境较困难的一户农民预购买一批农资，有如下两种方案：

方案一：分两次付款购买，实际付款分别为 3 150 元和 4 850 元；

方案二：一次性付款购买．

若采取方案二购买这批农资，则比方案一节省_______元．

答案：700

解析：3150÷0.9＝3500，(4850－4500)÷0.7＋5000＝5500，3500＋5500＝9000，
4500＋4000×0.7＝7300，3150＋4850－7300＝700.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=1$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$．记 $b_n=a_{n+1}+a_n$，求证：

（1）$\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）$\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $\dfrac{b_n}{T_1\cdot T_2}+\dfrac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

解：（1）证明：由 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，得 $b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)=2b_n$，

又 $b_1=a_1+a_2=2\neq 0$，所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

（2）由（1）知，$T_n=\dfrac{2-2^n\times 2}{1-2}=2(2^n-1)$，

于是 $\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}=\dfrac{T_{n+1}-T_n}{T_n\cdot T_{n+1}}=\dfrac{1}{T_n}-\dfrac{1}{T_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$，

$$\frac{b_2}{T_1\cdot T_2}+\frac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})+\cdots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}).$$

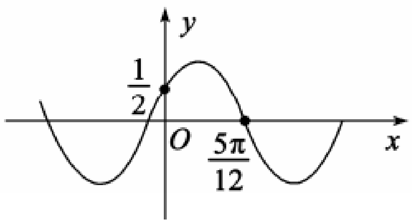
因为 $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}>0$，所以 $\dfrac{b_2}{T_1\cdot T_2}+\dfrac{b_3}{T_2\cdot T_3}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{T_n\cdot T_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

18.（本小题满分 12 分）

若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{5\pi}{12})=0$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）在锐角△ABC 中，若 A＞B，$f(\dfrac{A-B}{2}-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\dfrac{A-B}{2}$，并证明 $\sin A>\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



解：（1）由 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，得 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，又 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

由 $f(\dfrac{5\pi}{12})=0$，得 $\sin(\omega\cdot\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6})=0$，

所以 $\omega\cdot\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\omega=\dfrac{2}{5}(6k-1)$，$k\in\mathbf{Z}$，

由 $\omega>0$，结合函数图象可知 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}>\dfrac{5\pi}{12}$，所以 $0<\omega<\dfrac{12}{5}$，

所以有 $0<\dfrac{2}{5}(6k-1)<\dfrac{12}{5}$，即 $\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{7}{6}$，又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$，

从而 $\omega=\dfrac{2}{5}\times(6\times1-1)=2$，因此，$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$；

（2）由 $f(\dfrac{A-B}{2}-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{5}$，得 $\sin(A-B)=\dfrac{3}{5}$，

又 $0 < A-B < \frac{\pi}{2}$，故 $\cos(A-B) = \frac{4}{5}$，

于是 $\cos\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(A-B)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$，

又 $A+B > \frac{\pi}{2}$，所以 $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} > \frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}$，

又 $y = \sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，$A \in (0,\frac{\pi}{2})$，$\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2} \in (0,\frac{\pi}{2})$，

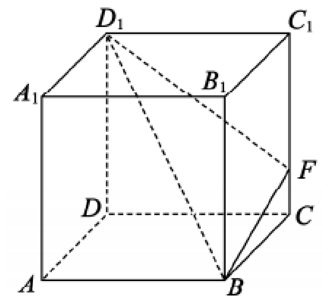
所以 $\sin A > \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19．（本小题满分 12 分）

如图，正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 F 在棱 CC_1 上，过 B，D_1，F 三点的正方体的截面 α 与直线 AA_1 交于点 E.

（1）找到点 E 的位置，作出截面 α（保留作图痕迹），并说明理由；

（2）已知 CF＝a，求 α 将正方体分割所成的上半部分的体积 V_1 与下半部分的体积 V_2 之比.



解：（1）在正方形 CDD_1C_1 中，过 F 作 FG∥DC，且交棱 DD_1 于点 G，

连接 AG，在正方形 ADD_1A_1 内过 D_1 作 $D_1E \parallel AG$，且交棱 AA_1 于点 E，

连接 EB，ED_1，则四边形 BED_1F 就是要作的截面 α，

理由：由题意，平面 $\alpha \cap$ 平面 $AD_1 = D_1E$，

$\alpha \cap$ 平面 $BC_1 = BF$，平面 $AD_1 \parallel$ 平面 BC_1，

应有 $D_1E \parallel BF$，

同理，$BE \parallel FD_1$，所以四边形 BED_1F 应是平行四边形，

由作图过程，$FG \parallel DC$，$FG = DC$．又 $AB \parallel DC$，$AB = DC$，

所以$AB\parallel FG$，$AB=FG$，所以四边形ABFG是平行四边形，

所以AG∥BF，AG＝BF，

由作图过程，$D_1E\parallel AG$，又EA∥D_1G，

所以四边形$EAGD_1$是平行四边形，所以$D_1E\parallel AG$，$D_1E=AG$.

又$AG\parallel BF$，$AG=BF$，所以$D_1E\parallel BF$，且$D_1E=BF$，

所以四边形BED_1F是平行四边形，四边形BED_1F就是要作的截面；

方法不唯一，其他方法正确的一律给分，

（2）由题意，$CF=a\ (0<a<1)$，由（1）的证明过程，可得$A_1E=a$，

连接D_1B_1，则平面α将正方体分割所成的上半部分的几何体可视为四棱锥$D_1-A_1EBB_1$与四棱锥$D_1-B_1BFC_1$的组合体，

$$V_1=V_{D_1-A_1EBB_1}+V_{D_1-B_1BFC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{(a+1)\times 1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{[(1-a)+1]\times 1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

该正方体的体积$V=1$，$V_2=V-V_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 所以$V_1$：$V_2=1$.

20.（本小题满分12分）

天问一号火星探测器于2021年2月10日成功被火星捕获，实现了中国在深空探测领域的技术跨越．为提升探测器健康运转的管理水平，西安卫星测控中心组织青年科技人员进行探测器遥控技能知识竞赛，已知某青年科技人员甲是否做对每个题目相互独立，做对A，B，C三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示．

题目	A	B	C
做对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的奖金/元	1 000	2 000	3 000

规则如下：按照A，B，C的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题．

（1）求甲获得的奖金X的分布列及均值；

（2）如果改变做题的顺序，获得奖金的均值是否相同？如果不同，你认为哪个顺序获得奖金的均值最大？（不需要具体计算过程，只需给出判断）

解：（1）分别用A，B，C表示做对题目A，B，C的事件，则A，B，C相互独立，

由题意，X的可能取值为0，1000，3000，6 000

P(X＝0)＝P($\overline{A}$)＝0.2；P(X＝1000)＝P(A$\overline{B}$)＝0.8×0.4＝0.32

P(X＝3000)＝$P(AB\overline{C})$＝0.8×0.6×0.6＝0.288

P(X＝6000)＝P(ABC)＝0.8×0.6×0.4＝0.192

所以甲获得的奖金 X 的分布列为：

X	0	1000	3000	6000
P	0.2	0.32	0.288	0.192

E(X)＝0×0.2＋1000×0.32＋3000×0.288＋6000×0.192＝2336；

（2）改变做题的顺序，获得奖金的均值互不相同，

决策的原则是选择期望值 E(X)大的做题顺序，这称为期望值原则，做对的概率大表示题目比较容易，做对的概率小表示题目比较难．猜想：按照由易到难的顺序做题，即按照题目 A，B，C 的顺序做题，得到奖金的期望值最大．

21．(本题满分 12 分)

已知动点 M 与两个定点 O(0，0)，A(3，0)的距离的比为$\frac{1}{2}$，动点 M 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的轨迹方程，并说明其形状；

（2）过直线$x=3$上的动点 P(3，p)(p≠0)分别作 C 的两条切线 PQ、PR（Q、R 为切点），N 为弦 QR 的中点，直线 l：$3x+4y=6$分别与 x 轴、y 轴交于点 E、F，求△NEF 的面积 S 的取值范围．

解：（1）设$M(x,y)$，由$\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{1}{2}$，得$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，

化简得$x^2+y^2+2x-3=0$，即$(x+1)^2+y^2=4$，

故 C 是以(－1，0)为圆心，半径为 2 的圆，

（2）设$D(-1,0)$，又$P(3,p)(p\neq 0)$，则 DP 的中点为$(1,\frac{p}{2})$，$|DP|=\sqrt{16+p^2}$，

以线段 DP 为直径的圆的方程为$(x-1)^2+(y-\frac{p}{2})^2=(\frac{\sqrt{16+p^2}}{2})^2$，

整理得$x^2+y^2-2x-py-3=0$ ①

由题意，Q、R 在以 DP 为直径的圆上，

又 Q、R 在 C：$x^2+y^2+2x-3=0$ ②上，

由②－①，得$4x+py=0$，

所以，切点弦 QR 所在直线的方程为$4x+py=0$．

可见 QR 恒过坐标原点 O(0，0)，

由$\begin{cases}4x+py=0,\\(x+1)^2+y^2=4\end{cases}$消去 x 并整理得$(16+p^2)y^2-8py-48=0$．

设$Q(x_1,y_1)$，$R(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{8p}{16+p^2}$，

点 N 纵坐标 $y_N=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{4p}{16+p^2}$，

因为$p\neq 0$，显然$y_N\neq 0$，

所以点 N 与点 D(－1，0)，O(0，0)均不重合，
因为 N 为弦 QR 的中点，且 D(－1，0)为圆 C 的圆心，
由圆的性质，可得 DN⊥QR，即 DN⊥ON，

所以点 N 在以 OD 为直径的圆上，圆心为 G($-\dfrac{1}{2}$，0)，半径 $r=\dfrac{1}{2}$，

因为直线$3x+4y=6$分别与 x 轴、y 轴交于点 E、F，

所以$E(2,0)$，$F(0,\dfrac{3}{2})$，因此$|EF|=\dfrac{5}{2}$，

圆心$G\ (-\dfrac{1}{2},0)$到直线$3x+4y=6$的距离$d=\dfrac{|3\times(-\frac{1}{2})+4\times 0-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3}{2}$，

设△NEF 的边 EF 上的高为 h，则点 N 到直线$3x+4y=6$的距离 h 的最小值为

$d-r=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$；点 N 到直线$3x+4y=6$的距离 h 的最大值为$d+r=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$.

S 的最小值$S_{\min}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times 1=\dfrac{5}{4}$，最大值$S_{\max}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times 2=\dfrac{5}{2}$.

因此△NEF 的面积 S 的取值范围是$[\dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{2}]$.

22．(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\cos x+1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x}$，且 $f'(\dfrac{\pi}{2})=0$.

（1）求实数 a 的值，并判断 $f(x)$ 在(0，$\dfrac{\pi}{2}$)上的单调性；

（2）对确定的 $k\in N^*$，求 $f(x)$ 在[$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$， $2k\pi+\pi$]上的零点个数.

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=-a\sin x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x}$.

所以$f'(\dfrac{\pi}{2})=-a\sin\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}=1-a$，由题意，$1-a=0$，即$a=1$.

于是，$f'(x)=-\sin x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x}$.

当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f'(x)=-\sin x+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x}>\mathrm{e}^0-\sin x=1-\sin x>0$.

所以 $f(x)$ 在$(0,\ \dfrac{\pi}{2})$上单调递增；

（2）$f(x)=\cos x+1-e^{\frac{\pi}{2}-x}$．因为$e^{x-\frac{\pi}{2}}\neq 0$，所以$g(x)=e^{x-\frac{\pi}{2}}f(x)=(1+\cos x)e^{x-\frac{\pi}{2}}-1$与$f(x)$在$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上有相同的零点，

$g'(x)=(1+\cos x-\sin x)e^{x-\frac{\pi}{2}}=[1+\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})]e^{x-\frac{\pi}{2}}$．

当$x\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi)$时，$x+\dfrac{\pi}{4}\in(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4})$，$\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\in[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},-1)$，$1+\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})<0$．

又$e^{x-\frac{\pi}{2}}>0$，所以$g'(x)=[1+\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})]e^{x-\frac{\pi}{2}}<0$，

所以，当$x\in[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$时，$g(x)$单调递减，

又$g(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=e^{2k\pi}-1>e^{0}-1=0$，$g(2k\pi+\pi)=-1<0$，

由零点存在性定理及$g(x)$的单调性，知$g(x)$在$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上有且仅有一个零点，

所以 $f(x)$ 在$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{N}$）上恰有一个零点．