数学测试卷

一．选择题（共 8 小题）

1．（2020•芮城县模拟）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $2a_5-a_2=2$，则 $S_{15}=$（　　）

A．28　　　B．30　　　C．56　　　D．60

2．（2018 秋•滨海新区期末）已知 $ab>0$，若 2 是 2^a 与 4^b 等比中项，则$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{2b+1}$的最小值为（　　）

A．$\frac{7}{4}$　　　B．$\frac{9}{4}$　　　C．$\frac{5}{2}$　　　D．3

3．（2019 春•上高县校级月考）等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{n+5}$，则$\frac{a_6}{b_6}=$（　　）

A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5

4．（2019 春•兴庆区校级期末）已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=-n^2+10n-21$，前 n 项和为 S_n，若 $m>n$，则 S_m-S_n 的最大值是（　　）

A．5　　　B．10　　　C．15　　　D．20

5．（2020•广东学业考试）在公差 $d=3$ 的等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=-2$，则数列$\{|a_n|\}$的前 10 项和为（　　）

A．127　　　B．125　　　C．89　　　D．70

6．（2019 秋•宜城市期中）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_{13}>0$，$S_{14}<0$，则$\frac{S_1}{a_1}$，$\frac{S_2}{a_2}$，…，$\frac{S_{13}}{a_{13}}$中最大的项为（　　）

A．$\frac{S_6}{a_6}$　　　B．$\frac{S_7}{a_7}$　　　C．$\frac{S_8}{a_8}$　　　D．$\frac{S_{13}}{a_{13}}$

7．（2020•黄冈模拟）如图，方格蜘蛛网是由一族正方形环绕而成的图形．每个正方形的四个顶点都在其外接正方形的四边上，且分边长为 3：4．现用 13 米长的铁丝材料制作一个方格蜘蛛网，若最外边的正方形边长为 1 米，由外到内顺序制作，则完整的正方形的个数最多为（参考数据：$lg\frac{7}{5}\approx 0.15$）（　　）

A．6 个　　　B．7 个　　　C．8 个　　　D．9 个

8．（2019春•龙岩期中）若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n=(-1)^{n+2018}a$，$b_n=2+\frac{(-1)^{n+2019}}{n}$，且$a_n<b_n$，对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$[-1,\frac{1}{2})$　　B．$[-1,1)$　　C．$[-2,1)$　　D．$[-2,\frac{3}{2})$

二．多选题（共4小题）

9．（2019秋•江苏月考）已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，公比为q，且$a_1>1$，$a_6+a_7>a_6a_7+1>2$，记$\{a_n\}$的前n项积为T_n，则下列选项中正确的选项是（　　）

A．$0<q<1$　　B．$a_6>1$　　C．$T_{12}>1$　　D．$T_{13}>1$

10．（2020•威海一模）等差数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，若$a_1>0$，$S_{10}=S_{20}$，则（　　）

A．$d<0$　　B．$a_{16}<0$

C．$S_n\le S_{15}$　　D．当且仅当$S_n<0$时$n\ge 32$

11．（2019秋•历下区校级期中）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，其前n项和为S_n，前n项积为T_n，并且满足条件$a_1>1$，$a_6a_7>1$，$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$，则下列结论正确的是（　　）

A．$0<q<1$　　B．$a_6a_8>1$

C．S_n的最大值为S_7　　D．T_n的最大值为T_6

12．（2019秋•济宁期末）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，其前n项和为S_n，前n项积为T_n，并满足条件$a_1>1$，$a_{2019}a_{2020}>1$，$\frac{a_{2019}-1}{a_{2020}-1}<0$，下列结论正确的是（　　）

A．$S_{2019}<S_{2020}$

B．$S_{2019}S_{2021}-1<0$

C．T_{2019}是数列$\{T_n\}$中的最大值

D．数列$\{T_n\}$无最大值

三．填空题（共4小题）

13．（2019秋•天津期中）已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$，若$a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2n}=a_5a_7$，$a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}=a_5a_6$，且$S_{2n}=240$，则公差$d=$_______.

14．（2019秋•镜湖区校级月考）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_3=6$，$S_7=28$，则$\frac{a_1+a_n}{S_{n+4}}$的最大值

是______

15．（2020 春•湛河区校级月考）若一个数列的第 m 项等于这个数列的前 m 项的乘积，则称该数列为“m 积数列”，若各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$是一个“2020 积数列”，且 $a_1>1$，则当其前 n 项的乘积取最大值时，n 的最大值为______．

16．（2020•青浦区二模）定义函数 $f(x)=\{x\{x\}\}$，其中$\{x\}$表示不小于 x 的最小整数，如$\{1.4\}=2$，$\{-2.3\}=-2$，当 $x\in(0,n]$（$n\in\mathbf{N}^*$）时，函数 $f(x)$ 的值域为 A_n，记集合 A_n 中元素的个数为 a_n，则 $a_n=$______．

四．解答题（共 5 小题）

17．（2020 春•海淀区校级期中）设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知满足______，求公比 q 以及 $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$．

从①$a_2a_5=-32$ 且 $a_3+a_4=-4$，②$a_1=1$ 且 $S_6=9S_3$，③$S_2=a_3-1$ 且 $S_3=a_4-1$ 这三组条件中任选一组，补充到上面问题中，并完成解答．

18．（2020•宁波二模）已知正项数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且 a_n 与 a_{n+1} 等比中项是$\sqrt{2S_n}$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1+b_2+\ldots+b_n=\dfrac{a_n}{2a_{n+2}}$．

（I）求 a_2，a_3，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）记 $c_n=\sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$．

19．（2020•北京模拟）在①$a_4=b_4$，②$a_2+b_5=2$，③$S_6=-24$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的正整数 k 存在，求 k 的值；若 k 不存在，请说明理由．

设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$\{b_n\}$是等比数列，______，$b_1=a_5$，$b_3=-9$，$b_6=243$．是否存在 k，使得 $S_k>S_{k-1}$ 且 $S_{k+1}<S_k$？

20．（2020•宿迁模拟）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，把满足条件 $a_{n+1}\le S_n$（$n\in\mathbf{N}^*$）的所有数列$\{a_n\}$构成的集合

记为 M．

（1）若数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，则$\{a_n\}$是否属于 M？

（2）若数列$\{a_n\}$是等差数列，且$\{a_n+n\}\in M$，求 a_1 的取值范围；

（3）若数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$\{a_n\}\in M$，数列$\{\dfrac{4^n}{a_n}\}$中是否存在无穷多项依次成等差数列，若存在，

给出一个数列$\{a_n\}$的通项：若不存在，说明理由．

21．（2019春•珠海期末）函数f（x）$=\dfrac{1-x}{ax}+lnx$（$a>0$，$e\approx 2.71828\ldots$）．

（1）若函数f（x）在[1，+∞）上为增函数，求实数a的取值范围；

（2）求证：$n\in\mathbf{N}$，$n\geq 2$时，$n>e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}$．