高考新题型

一、多项选择题

1.已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q ,前 4 项的和为a_1+14,且a_2,a_3+1,a_4成等差数列,则 q 的值可能为( )

A.$\frac{1}{2}$ B.1 C.2 D.3

2.等差数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列，满足$a_7=3a_5$，前 n 项和为S_n，下列选择项正确的是( )

A. $d>0$

B. $a_1<0$

C. 当$n=5$时S_n最小

D. $S_n>0$时 n 的最小值为 8

3.已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若a_n是S_n与$\lambda(\lambda\neq0)$的等差中项，则下列结论中正确的是( )

A.当且仅当$\lambda=2$时，数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列

B.数列$\left\{a_n\right\}$一定是单调递增数列

C.数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是单调数列

D.$a_na_{n+2}>0$

4.已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,$\{b_n\}$是公差不为 0 的等差数列,且$a_2=b_2,a_8=b_8$,则( )

A.$a_5=b_5$ B.$a_5<b_5$ C.$a_4<b_4$ D.$a_6=b_6$

5.已知数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为$S_n\left(S_n\neq0\right)$，且满足$a_n+4S_{n-1}S_n=0\,(n\geq2),a_1=\frac{1}{4}$，则下列说法正确的是（ ）

A.数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为$\mathrm{S}_n=\frac{1}{4n}$

B. 数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{4n(n+1)}$

C.数列$\left\{a_n\right\}$为递增数列

D. 数列$\{\frac{1}{S_n}\}$为递增数列

6.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_{n+3}+(-1)^na_{n+1}=1(n\in\mathrm{N}^*)$,数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,则下列结论正确的是( )

A.数列$\{a_n\}$为等差数列

B.$a_{18}=10$

C.$a_{17}=3$

D.$S_{31}=146$

7.设$a,b\in\mathrm{R}$,数列$\{a_n\}$满足$a_1=a,a_{n+1}=a_n^2+b,n\in\mathrm{N}^*$,则下列说法不正确的是( )

A.当$b=\frac{1}{2}$时,$a_{10}>10$

B.当$b=\frac{1}{4}$,$a_{10}>10$

C.当$b=-2$,$a_{10}>10$

D.当$b=-4$时,$a_{10}>10$

8.已知数列$\{a_n\}$满足$2a_n \le a_{n-1} + a_{n-1}(n \in \mathrm{N}^*, n \ge 2)$,则( )

A. $a_5 \ge 4a_2 - 3a_1$　　B. $a_2 + a_7 \le a_3 + a_6$　　C. $3(a_7 - a_6) \ge a_6 - a_3$　　D. $a_2 + a_3 \ge a_6 + a_7$

9.数列$\{F_n\}$:1,1,2,3,5,8,13,21,34 …称为斐波那契数列,是由十三世纪意大利数学家列昂纳多・斐波那契以兔子繁殖为例子而引人的，故又称为“兔子数列”,该数列从第三项开始，每项等于其前相邻两项之和.记数列$\{F_n\}$的前n项和为S_n则下列结论正确的是( )

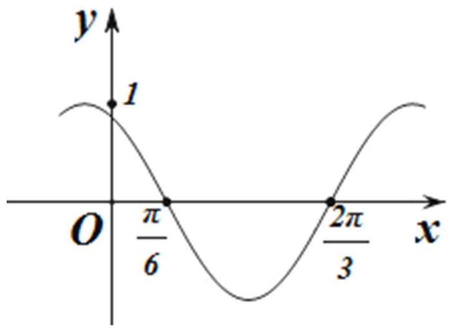
A. $S_5 = F_7 - 1$　　B. $S_5 = S_6 - 1$　　C. $S_{2019} = F_{2021} - 1$　　D. $S_{2019} = F_{2020} - 1$

10.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,且有

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_{n+1}(n \ge 2, n \in \mathrm{N}^*)$, $a_1 = a_2 = 1$,数列$\{\dfrac{1}{\log_2 S_{n+1} \cdot \log_2 S_{n+2}}\}$的前 n 项和为$T_n$,则以下结论正确的是( )

A. $a_n = 1$　　B. $S_n = 2^{n-1}$　　C. $T_n = \dfrac{n+1}{n+3}$　　D. $\{T_n\}$为增数列

11.下图是函数$y = \sin(\omega x + \varphi)$的部分图像，则$\sin(\omega x + \varphi) =$（　）



A. $\sin(x + \dfrac{\pi}{3})$　　B. $\sin(\dfrac{\pi}{3} - 2x)$　　C. $\cos(2x + \dfrac{\pi}{6})$　　D. $\cos(\dfrac{5\pi}{6} - 2x)$

12.(多选)给出下列命题:

①$-75°$是第四象限角;

②$225°$是第三象限角;

③$475°$是第二象限角;

④$-315°$是第一象限角.

其中正确的命题是（　）

A.①　　B.②　　C.③　　D.④

13.若将函数$f(x) = \cos(2x + \dfrac{\pi}{12})$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位长度,得到函数$g(x)$的图象,则下列说法正确的是( )

A. $g(x)$的最小正周期为 π

B. $g(x)$在区间$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减

C. $x=\frac{\pi}{12}$ 不是函数 $g\left(x\right)$ 图象的对称轴

D. $g\left(x\right)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

14.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})$ 的图象的一条对称轴为 $x=\pi$,其中 ω 为常数,且 $\omega\in(0,1)$,则以下结论正确的是( )

A.函数 $f(x)$ 的最小正周期为 3π

B.将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 所得图象关于原点对称

C.函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

D.函数 $f(x)$ 在区间 $(0,100\pi)$ 上有 66 个零点

15.下列各式中，值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的是( )

A. $\sin\ 15°\cos\ 15°$

B. $\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$

D. $\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}$

16.在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos B=\frac{3}{5}$,则下列结论正确的是( )

A. $\cos A=\pm\frac{12}{13}$

B. $\sin B=\frac{4}{5}$

C. $\cos C=\frac{56}{65}$ 或 $-\frac{16}{65}$

D. $\sin C=\frac{63}{65}$

17.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，下列结论中正确的选项有( )

A.若 $A>B$ ，则 $\sin A>\sin B$

B.若 $\sin 2A=\sin 2B$ ，则 $\triangle ABC$ 可能为等腰三角形或直角三角形

C.若 $a\cos B-b\cos\mathrm{A}=c$ ，则 $\triangle ABC$ 定为直角三角形

D.若 $B=\frac{\pi}{3},a=2$ 且该三角形有两解，则 b 的取值范围是 $(\sqrt{3},2)$

18.根据下列情况，判断三角形解的情况，其中正确的是( )

A. $a=8,b=16,A=30^{\circ}$ ，有两解

B. $b=18,c=20,B=60^{\circ}$ ，有两解

C. $a=5,c=2,A=90^{\circ}$ ，无解

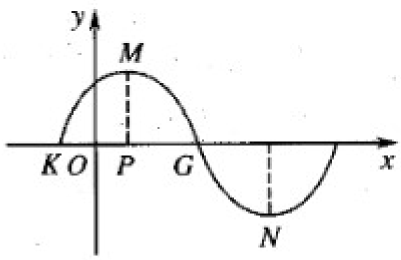
D. $a=30,b=25,A=150^{\circ}$ ，有一解

19.在 $\triangle ABC$ 中,三边长分别为 $a,a+2,a+4$,最小角的余弦值为 $\frac{13}{14}$,则下列说法正确的是( )

A.a 的值为 2　　　　B.$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

C.$\triangle ABC$ 中最大角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D.$\triangle ABC$ 为钝角三角形且最大角为 120°

20.已知函数 $f(x)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\varphi\right)\left(A>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,若点 $M(1,A)$,且 $\angle KMN=\dfrac{\pi}{2}$,则(　)



A.$M(1,2)$

B.函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C.$x=6$ 是该函数图象的一条对称轴

D.将函数 $g(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象右移 2 个单位长度可得到该函数图象

21.若 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$，则下列不等式成立的是（　）

A. $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$　　B. $a<b$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

22.已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，则(　)

A.$a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}$　　B.$2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$　　C.$\log_2 a+\log_2 b\geq -2$　　D.$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$

23.若 $a<b<-1,c>0$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A. $a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$　　　　B. $a-\dfrac{1}{b}<b-\dfrac{1}{a}$

C. $\ln(b-a)>0$　　　　D. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c>\left(\dfrac{b}{a}\right)^c$

24.若 $a<b<-1$，$c>0$ 则下列不等式中一定成立的是(　)

A.$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$　　　　B.$a-\dfrac{1}{b}<b-\dfrac{1}{a}$

C.$\ln(b-a)>0$　　　　D.$\left(\dfrac{a}{b}\right)^c>\left(\dfrac{b}{a}\right)^c$

25.已知$a>0>b$,则下列不等式一定成立的是( )

A.$a^2<-ab$　　B.$|a|<|b|$　　C.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D.$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

26.若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则下列不等式中正确的是( )

A.$a+b>ab$　　B.$|a|<|b|$　　C.$a<b$　　D.$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$

27.给出下列四个条件：①$xt^2>yt^2$；②$xt>yt$；③$x^2>y^2$；④$0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.其中能成为$x>y$的充分条件的是( )

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

28.若$a>b>0$,则以下几个命题正确的是( )

A.$\frac{b}{a}<\frac{b+5}{a+5}$　　B.$\lg\frac{a+b}{2}<\frac{\lg a+\lg b}{2}$

C.$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{a}$　　D.$\sqrt{a}-\sqrt{b}>\sqrt{a-b}$

29.下列选项中正确的是( )

A．不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$恒成立.

B．存在实数a，使得不等式$a+\frac{1}{a}\leq 2$成立.

C．若a、b为正实数，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$.

D．若正实数x,y满足$x+2y=1$，则$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geq 8$.

30.若a,b为正实数，则$a>b$的充要条件为( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\ln a>\ln b$　　C. $a\ln a<b\ln b$　　D. $a-b<e^a-e^b$

参考答案

1.答案：AC

解析：因为a_2,a_3+1,a_4成等差数列,所以$a_2+a_1=2\left(a_3+1\right)$,因此,$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+3a_3+2=a_1+14$,故$a_3=4$.又$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,所以由

a $a_2+a_1=2\left(a_3+1\right)$,得$a_3\left(q+\frac{1}{q}\right)=2\left(a_3+1\right)$,解得$q=2$或$\frac{1}{2}$.

2.答案：ABD

解析：由$a_7=3a_5$可得，$a_1+6d=3\left(a_1+4d\right)$,即$a_1=-3d$由于等差数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列，可知$d>0$，则$a_1<0$，故$A,B$正确；

因为$S_n=na_1+\frac{n(n+1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n=\frac{d}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49d}{8}$可知，当$n=3$或$n=4$时，$S_n$最小，故 C 错误；

令$S_n=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n>0$,得$n<0$或$n>7$,即$S_n>0$时， n 的最小值为 8，故 D 正确

3.答案：CD

解析：因为a_n是S_n与 λ 的等差中项，所以$2a_n=S_n+\lambda$，所以$a_1=\lambda,a_2=2\lambda$.又$2a_{n-1}=S_{n-1}+\lambda(n\geqslant2)$，所以$a_n=2a_{n-1}$，所以数列$\left\{a_n\right\}$是以 λ 为首项，2 为公比的等比数列，$a_n=\lambda\cdot2^{n-1}$，故选项 A 错误.当$\lambda<0$时，数列$\left\{a_n\right\}$是单调递减数列，故选项 B 错误.因为$a_n=\lambda2^{n-1}$，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\lambda2^{n-1}}$，当$\lambda>0$时，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是单调递减数列；当$\lambda<0$时，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是单调递增数列，故选项 C 正确.由于$a_na_{n+2}=\left(\lambda2^{n-1}\right)\left(\lambda2^{n+1}\right)=\lambda^2 2^{2n}>0$，故选项 D 正确.所以正确选项为 CD.

4.答案：BC

解析：设$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$,$\{b_n\}$的公差为$d(d\neq0)$,$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$,$b_n=b_1+(n-1)d=b_1-d+nd$,将其分别理解成关于 n 类 (指数函数指数函数的图象为下凹曲线)和一次函数(一次函数的图象为直线),则俩函数图象在$n=2,n=8$处相交,故$a_n<b_n$ $(3\leq n\leq7)$,从而$a_4<b_4,a_5<b_5,a_6<b_6$

5.答案：AD

解析：数列$\left\{an\right\}$的前 n 项和为$S_n\left(S_n\neq0\right)$,且满足$a_n+4S_n-1S_n=0\left(n\geqslant2\right)$, $a_1=\frac{1}{4}$,

∴ $S_n-S_{n-1}+4S_{n-1}S_n=0$,化为：$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=4$.

$\therefore$数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是等差数列，公差为 4，

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=4+4(n-1)=4n$,可得 $S_n=\dfrac{1}{4_n}$.

$\therefore n\geqslant 2$ 时, $a_n=4S_{n-1}S_n=4\times\dfrac{1}{4(n-1)}\times\dfrac{1}{4n}=\dfrac{1}{4n(n-1)}$.

可知：B，C 不正确，AD 正确。

6.答案：BD

解析：依题意得,当 n 是奇数时, $a_{n+3}-a_{n+1}=1$ 即数列 $\{a_n\}$ 中的偶函数构成以 $a_2=2$ 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $a_{18}=2+(9-1)\times 1=10$,当 n 是偶数时, $a_{n+3}+a_{n+1}=1$,所以 $a_{n+5}+a_{n+3}=1$,两式相减,得 $a_{n+5}=a_{n+1}$,即数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项从 a_3 开始,每隔一项的两项相等,即数列 $\{a_n\}$ 的奇数呈周期变化,所以 $a_{17}=a_{4\times 3+5}=a_5$,在 $a_{n+3}+a_{n+1}=1$ 中,令 $n=2$,得 $a_5+a_3=1$,因为 $a_3=3$,所以 $a_{17}=-2$,对于数列 $\{a_n\}$ 的前 31 项,奇数项满足 $a_3+a_5=1,a_7+a_9=1,\cdots a_{27}+a_{29}=1,a_{31}=a_{4\times 7+3}=a_3=3$,偶数项构成以 $a_2=2$ 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $S_{31}=1+7+3+15\times 2+\dfrac{15\times(15-1)}{2}=146$,故选 BD

7.答案：BCD

解析：当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时,因为 $a_{\mathrm{n}+1}=a_{\mathrm{n}}^2+\dfrac{1}{2}$,所以 $a_2\geq\dfrac{1}{2}$,又 $a_{\mathrm{n}+1}=a_{\mathrm{n}}^2+\dfrac{1}{2}\geq\sqrt{2}a_{\mathrm{n}}$,故

$a_9\geq a_2\times(\sqrt{2})^7\geq\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^7=4\sqrt{2}$, $a_{10}>a_9^2\geq 32>10$.当 $b=\dfrac{1}{4}$ 时, $a_{\mathrm{n}+1}-a_{\mathrm{n}}=(a_{\mathrm{n}}-\dfrac{1}{2})^2$,故 $a_1=a=\dfrac{1}{2}$

时, $a_{10}=\dfrac{1}{2}$,所以 $a_{10}>10$ 不成立,同理 $b=-2$ 和 $b=-4$ 时,均存在小于 10 的数 x_0 ,只需 $a_1=a=x_0$,则

$a_{10}=x_0<10$,故 $a_{10}>10$ 不成立.所以选 BCD.

8.答案：AC

解析：由 $2a_n\leq a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$,可得 $a_n-a_{n-1}\leq a_{n+1}-a_n$,所以 $a_2-a_1\leq a_3-a_2\leq\ldots\leq a_{n+1}-a_n$,所以 $a_5-a_4+a_4-a_3+a_3-a_2\geq 3(a_2-a_1)$,化简得 $a_5\geq 4a_2-3a_1$,故选项 A 正确;由 $a_7-a_6\geq a_3-a_2$ 可得 $a_7+a_2\geq a_6+a_3$,故选项 B 错误;由 $3(a_7-a_6)\geq a_6-a_5+a_5-a_4+a_4-a_3=a_6-a_3$,故可知选项 C 正确,若 $a_n=n$,满足 $2a_n\leq a_{n-1}+a_{n+1}(n\geq 2)$,但 $a_2+a_3=5<a_6+a_7=13$,所以选项 D 错误,故选 AC.

9.答案：AC

解析：根据题意有 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 3)$,所以

$S_3=F_1+F_2+F_3=1+F_1+F_2+F_3-1=F_3+F_2+F_3-1=F_4+F_3-1=F_5-1$,

$S_4=F_4+S_3=F_4+F_5-1=F_6-1$, $S_5=F_5+S_4=F_5+F_6-1=F_7-1\ldots$

所以 $S_{2019}=F_{2019}-1$.

10.答案：BD

解析：解析: 由 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\cdot a_{n+1}$ 得 $S_n(S_n-S_{n-1})=S_{n-1}(S_{n+1}-S_n)$

化简得 $S_n^2=S_nS_{n+1}$,根据等比数列的性质得数列 $\{S_n\}$ 是等比数列,易知 $S_1=1,S_2=2$,故 $\{S_n\}$

的公比为 2,则 $S_n=2^{n-1},S_{n+1}=2^n,S_{n+2}=2^{n+1}$ $\dfrac{1}{\log_2 S_{n+1}\cdot\log_2 S_{n+2}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

由裂项消法得 $T_n=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$,故 B 正确,C 错误,D 正确

根据 $S_n=2^{n-1}$ 知 A 选项错误,故答案为 BD

11.答案：BC

解析：由图易知 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $T=\pi$， $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，由题意结合图像知， $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\pi$，故

$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $y=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})=\sin(2x+\pi-\dfrac{\pi}{3})=\sin(\dfrac{\pi}{3}-2x)$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6})=\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

12.答案：ABCD

解析：$\because -90°<-75°<0°$，$\therefore -75°$ 是第四象限角，A 正确;

$\because 180°<225°<270°$，$\therefore 225°$ 是第三象限角，B 正确；

$\because 360°+90°<475°<360°+180°$，$\therefore 475°$ 是第二象限角，C 正确;

$\because -360°<-315°<-270°$，$\therefore -315°$ 是第一象限角，D 正确.故选 ABCD.

13.答案：ACD

解析： $g(x)=\cos\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)+\dfrac{\pi}{12}\right]=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. $g(x)$ 的最小正周期为 π ,选项 A 正确;当

$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时, $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 故 $g(x)$ 在上有增有减,选项 B 错误; $g(\dfrac{\pi}{12})=0$,

故 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 不是 $g(x)$ 图象的一条对称轴,选项 C 正确.当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$时, $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

且当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$,即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $g(x)$ 取最小值 $-\dfrac{1}{2}$,D 正确.

14.答案：AC

解析：本题考查三角函数的性质与图象及函数零点.由函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})$ 图象的一条对称轴为

$x=\pi$,得 $\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$,因为 $\omega\in(0,1)$,所以 $k=0,\omega=\dfrac{2}{3}$,则 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,

所以周期项$T=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$,A 正确;将函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$得

$g(x)=f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{18}\right)$,,显然$g\left(x\right)$的图象不关于原点对称,B 项错误;

由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathrm{Z})$,取$k=0$,得$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$即$[-\dfrac{\pi}{2},\pi]$是函数$f\left(x\right)$的一个单调递增

区间,又$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]\subseteq\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$所

以函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,C 项正确;由$f\left(x\right)=0$,得$\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi(k\in \mathrm{Z})$,解得

$x=\dfrac{3}{2}(k\pi+\dfrac{\pi}{6})$,由$0<\dfrac{3}{2}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)<100\pi$,得$-\dfrac{1}{6}<k<66.5$,因为$k\in Z$.所以$k=0,1,2,\cdots,66$,所以函数

$f\left(x\right)$在区间$(0,100\pi)$上有 67 个零点,D 项错误.

15.答案：CD

解析：因为$\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{1}{2}\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，所以 A 不正确；

因为$\cos^2\dfrac{\pi}{6}-\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，所以 B 不正确；

因为$\dfrac{\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\dfrac{1}{2}\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 C 正确；

因为$\sqrt{\dfrac{1+\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 D 正确.

故选：CD.

16.答案：BD

解析：因为$\cos B=\dfrac{3}{5}$,所以$\sin B=\dfrac{4}{5}$,B 正确.因为$\sin A=\dfrac{5}{13}$,所以$\cos A=\pm\dfrac{12}{13}$.因为

$\sin B=\dfrac{4}{5}>\sin A=\dfrac{5}{13}$,所以$B<A$,所以角 A 为锐角,所以$\cos A=\dfrac{12}{13}$,A 错

误,$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}=-\dfrac{16}{65}$,C 错

误,$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$,D 正确.

17.答案：ABCD

解析：对于 A 选项，由正弦定理得$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$，故 A 选项正确.

对于 B 选项，由于 $\sin 2A=\sin 2B=\sin(\pi-2B)$，由于 A,B 是三角形的内角，所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，即 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 可能为等腰三角形或直角三角形，故 B 选项正确.

对于 C 选项，由 $a\cos B-b\cos A=c$ 以及正弦定理得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，

即 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $2\sin B\cos A=0$，由于 $\sin B>0$，所以 $\cos A=0$，所以 $A=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\triangle ABC$ 定为直角三角形.故 C 选项正确.

对于 D 选项，$B=\dfrac{\pi}{3},a=2$，且该三角形有两解，所以 $a\sin B<b<a$，即 $2\sin\dfrac{\pi}{3}<b<2$，也即 $\sqrt{3}<b<2$，故 D 选项正确.

故选：ABCD.

18.答案：BD

解析：对 A 项，若 $a=8,b=16,A=30^{\circ}$，由正弦定理可得 $\dfrac{8}{\sin 30^{\circ}}=\dfrac{16}{\sin B}$，解得 $\sin B=1$，则 $B=\dfrac{\pi}{2}$，此时该三角形只有一解，故 A 错误；

对 B 项，若 $b=18,c=20,B=60^{\circ}$，由正弦定理可得 $\dfrac{18}{\sin 60^{\circ}}=\dfrac{20}{\sin C}$，解得 $\sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$,根据大边对大角可得 $C>B$，则 C 可以为锐角，也可以为钝角，故三角形有 2 解，故 B 正确；

对 C 项，若 $a=5,c=2,A=90^{\circ}$，由正弦定理可得 $\dfrac{5}{\sin 90^{\circ}}=\dfrac{2}{\sin C}$，解得 $\sin C=\dfrac{2}{5}$，则三角形只有一解，故 C 错误；

对 D 项，若 $a=30,b=25,A=150^{\circ}$，由正弦定理可得 $\dfrac{30}{\sin 150^{\circ}}=\dfrac{25}{\sin B}$，解得 $\sin B=\dfrac{5}{12}$，由 $A=150^{\circ}$，则 B 为锐角，可得三角形有唯一解，故 D 正确；

故选：BD.

19.答案：BCD

解析：由条件知长为 a 的边对应的角最小,设为 A,长为 $a+2$ 的边对应的角为 B,长为 $a+4$ 的边对应的角为 C,则由余弦定理,得 $\cos A=\dfrac{(a+2)^2+(a+4)^2-a^2}{2(a+2)(a+4)}=\dfrac{13}{14}$,解得 $a=3$ 或 $a=-2$ (舍去),A 错误;三边长分别为 3,5,7,且 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 5\times 7\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$,B 正确;由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 可得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,C 正确;$\cos C=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times 3\times 5}=-\dfrac{1}{2}$,$\angle C=120^{\circ}$,故 D 正确.故选 BCD.

20.答案：AD

解析：由对称性知M,G,N三点共线，则$\angle KMG=\frac{\pi}{2}$.

又函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，

$\therefore x=1+4=5$是该函数图象的一条对称轴，

$\therefore PG=2$，则$\frac{\pi}{4}\times 1+\varphi=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，而$MK=MG$，

故$\triangle MKG$为等腰直角三角形，

$\therefore PG=PM$，则$PM=A=2$，

$\therefore M(1,2)$，

故$f(x)$的解析式为$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

将$g(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象右移2个单位长度可得

$g(x)=2\cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$,

故选 AD.

21.答案：BCD

解析：$\because \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$

令$a=-2,b=-1$

$\therefore \frac{1}{a-b}=\frac{1}{-2+1}=-1,\frac{1}{a}=\frac{1}{-1}=-1$

$\therefore \frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}$.

故 A 不成立；

$\because -2<-1,|-2|>|-1|,(-2)^2>(-1)^2$

$\therefore$B,C,D 成立.

22.答案：ABD

解析：对于选项 A，$\because a^2+b^2\geq 2ab$，$\therefore 2\left(a^2+b^2\right)\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1$，$\therefore a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$，正

确；对于选项 B，易知$0<a<1$，$0<b<1$，$\therefore -1<a-b<1$，$\therefore 2^{a-b}>2^{-1}=\frac{1}{2}$，正确；对于选项 C，令$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，则$\log_2\frac{1}{4}+\log_2\frac{3}{4}=-2+\log_2\frac{3}{4}<-2$，错误；对于选项 D，$\because \sqrt{2}=\sqrt{2(a+b)}$，$\therefore [\sqrt{2(a+b)}]^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$，$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$，正确.故选 ABD.

23.答案：*BD*

解析：由函数$y=x-\frac{1}{x}$在$(-\infty,-1)$上为增函数可知,当$a<b<-1$时,$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$，故选项 *A* 错误；

由函数$y=x+\frac{1}{x}$在在$(-\infty,-1)$上为增函数可知,当$a<b<-1$时,$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$，故选项 *B* 正确；

由于$a<b$,则$b-a>0$,但不确定$b-a$与 1 的大小关系,故$\ln(b-a)$与 0 的大小关系不确定，故选项 *C* 错误；

由$a<b<-1$可知,$\frac{a}{b}>1,0<\frac{b}{a}<1$,而$c>0$,则$\left(\frac{a}{b}\right)^c>1>\left(\frac{b}{a}\right)^c>0$，故选项 *D* 正确。

故选：*BD*.

24.答案：BD

解析：由函数$y=x-\frac{1}{x}$在$(-\infty,-1)$上为增函数可知，当$a<b<-1$时，$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$，故选项 A 错误；

由函数$y=x+\frac{1}{x}$在$(-\infty,-1)$上为增函数可知，当$a<b<-1$时，$a+\frac{1}{a}<b+\frac{1}{b}$，即

$a-\frac{1}{b}<b-\frac{1}{a}$，故选项 B 正确；

由于$a<b$，则$b-a>0$，但不确定$b-a$与 1 的大小关系，故$\ln(b-a)$与 0 的大小关系不确定，故选项 C 错误；

由$a<b<-1$可知，$\frac{a}{b}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$,而$c>0$，则$\left(\frac{a}{b}\right)^c>1>\left(\frac{b}{a}\right)^c>0$，故选项 D 正确.

故选：BD.

25.答案：CD

解析：当$a=1,b=-1$时,满足$a>0>b$,此时$a^2=-ab,|a|=|b|$,所以 A.B 不一定成立,$\because a>0>b,\therefore b-a<0,ab<0,\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$一定成立,又$y=(\frac{1}{2})^x$单调递减,$\therefore (\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$,故选 CD.

26.答案：BD

解析：若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则$a<0,b<0$,且$a>b$,所以$a+b<0$,$ab>0$,故A错;$a<0,b<0$,且$a>b$,显然$|a|<|b|$,故B正确;显然C错;由于$a<0,b<0$,故$\frac{b}{a}>0,\frac{a}{b}>0$,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$(当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即$a=b$时取"=").又$a>b$,所以$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$,故D正确.故选BD.

27.答案：AD

解析：①由$xt^2>yt^2$可知$t^2>0$,所以$x>y$,故$xt^2>yt^2\Rightarrow x>y$；

② 当$t>0$时,$x>y$；当$t<0$时,$x<y$,故$xt>yt \not\Rightarrow x>y$；

③ 由$x^2>y^2$,得$|x|>|y| \not\Rightarrow x>y$,故$x^2>y^2 \not\Rightarrow x>y$；

④ $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Rightarrow x>y$.故选AD.

28.答案：AC

解析：因为$a>b>0$,所以$\frac{b}{a}-\frac{b+5}{a+5}=\frac{5(b-a)}{a(a+5)}<0$,则$\frac{b}{a}<\frac{b+5}{a+5}$,因此A正确;因为$a>b>0$,所以$\lg\frac{a+b}{2}>\lg\sqrt{ab}=\frac{\lg a+\lg b}{2}$,因此B不正确;因为$a>b>0$,所以$(a+\frac{1}{b})-(b+\frac{1}{a})=(a-b)(1+\frac{1}{ab})>0$,因此C正确;因为$a>b>0$,所以可取$a=2,b=1$,则$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{2}-1<\sqrt{2-1}=1=\sqrt{a-b}$,因此D不正确.

29.答案：BCD

解析：不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$恒成立的条件是$a\geq 0,b\geq 0$，故A不正确；

当 a 为负数时，不等式$a+\frac{1}{a}\leq 2$成立．故B正确；由基本不等式可知C正确；

对于$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=4+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 4+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=8$，

当且仅当$\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$，即$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{4}$时取等号，故D正确．故选：BCD.

30.答案：BD

解析：a,b为正实数,由$a>b$,可得：$\ln a>\ln b,\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$a\ln a>b\ln b$，

令$f(x)=e^x-x,x>0,f'(x)=e^x-1>0$,可得：函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,∴$e^a-a>e^b-b$.

反之：由$e^a-a>e^b-b\Rightarrow a>b$；由$\ln a>\ln b\Rightarrow a>b>0$.

因此$a>b$的充要条件为：$\ln a>\ln b,a-b<e^a-e^b$.

故选：BD.